第60卷第1期 数学学报中文版 Vol.60, No.1
2017年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2017

文章编号: 0583-1431(2017)01-0159-14 文献标识码: A

C^*-代数的 Murray–von Neumann 分类理论的抽象架构

吴志强

南开大学陈省身数学研究所 天津 300071
E-mail: ckng@nankai.edu.cn

黄毅青

高雄市国立中山大学应用数学系 台湾 80424
E-mail: wong@math.nsysu.edu.tw

献给李炳仁老师 75 华诞

摘　要　Murray 和 von Neumann 在对 W^*- 代数进行分类工作时, 主要的工具是刻画 W^*- 代数中的投影的性质 (事实上, W^*- 代数是由投影所生成的). 因为一般的 C^*- 代数可能不包含任何非零的投影, 所以不能将 Murray 和 von Neumann 的方法, 直接地应用到 C^*- 代数上来得出分类理论. 本文作者在最近的两项工作中, 分别使用 C^*- 代数的开投影和正元来代替投影, 得到两套平行的 Murray–von Neumann 式的分类理论. 本文在简单描述了这两套分类理论之后, 将会给出一个一般的分类架构, 它可以用来得出好些 C^*- 代数的分类理论 (包括我们之前的两套理论), 我们也会通过它来讨论各种分类理论之间的等价性, 并给出之前两套理论的细化.

关键词　C^*- 代数; 开投影; 正元; Murray–von Neumann 分类
MR(2010) 主题分类　46L05, 46L35
中图分类　O177.1

An Abstract Framework for Murray–von Neumann Type Classification Schemes of C^*-algebras

Chi Keung NG

Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin 300071, *P. R. China*
E-mail: *ckng@nankai.edu.cn*

Ngai Ching WONG

Department of Applied Mathematics, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung 80424, *Taiwan, China*
E-mail: *wong@math.nsysu.edu.tw*

收稿日期: 2016-09-02; 接受日期: 2016-10-14
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11471168)

Abstract The famous work of Murray and von Neumann about decomposing W^*-algebras into different types (which is known as the classification theory of W^*-algebras) is based on the study of projections in W^*-algebras. Different from W^*-algebras (which are generated by projections), a C^*-algebra may contain no non-zero projection. Therefore, we cannot transport the classification theory of Murray and von Neumann directly to C^*-algebras. In our recent works, we have developed two classifying (or decomposition) schemes of C^*-algebras using the properties of their open projections and properties of their positive elements, respectively. In this note, after a briefing of our two classifying schemes of C^*-algebras, we introduce a more general classification framework that, on top of giving many other possible schemes, can be used to obtain, compare and refine the two classification schemes mentioned above.

Keywords C^*-algebras; open projections; positive elements; Murray–von Neumann classification

MR(2010) Subject Classification 46L05, 46L35

Chinese Library Classification O177.1

1 W^*- 代数的 Murray–von Neumann 分类理论

若一个 (复) Banach*- 代数 A 满足条件 $\|a^*a\| = \|a\|^2$ (对于所有 $a \in A$), 则存在一个 Hilbert 空间 H, 并一个从 A 到 $B(H)$ 的 (范数) 闭*- 子代数的 (必然地保范的)*- 代数同构 (详见文 [12, 定理 2.3.20]). 此时, 称 A 为 C^*- 代数. 如果一个 C^*- 代数 M 是某一个 Banach 空间 M_* 的对偶空间, 即 $M = (M_*)^*$, 则存在一个从 M 到某一个 $B(H)$ 的弱*- 闭*- 子代数的弱*- 连续*- 代数同构 (详见文 [12, 定理 4.2.5]). 此时, 称 M 为 W^*- 代数. 注意到, 一个 C^*- 代数 A 的二次对偶空间 A^{**} 必然是一个 W^*- 代数.

Murray 和 von Neumann 在 1930 年代完成了划时代的 W^*- 代数的分类工作 (详见文 [17], 并参考文 [11, 16]). 他们根据一个 W^*- 代数 M 中的投影的性质, 将 M 分解成为第 I、第 Ⅱ 和第 Ⅲ 型弱* 闭理想的直和. 以下作简单介绍.

令 p, q, r 为 M 中的投影, 即在 M 中那些满足条件 $p = p^* = p^2$ 的元素. 如果投影 r 满足 $pr = r$, 则称 r 为 p 的子投影, 并记为 $r \leq p$. 如果存在 M 中的元素 v, 使得 $v^*v = p$ 和 $vv^* = q$, 则称 p 和 q Murray–von Neumann 等价, 并记为 $p \sim q$. 此时, 也称 v 为部份保距元. 如果投影 q 与 p 的子投影等价, 即 $q \sim r \leq p$, 将记之为 $q \precsim p$. 可以证明 $p \precsim q$ 和 $q \precsim p$ 能推出 $p \sim q$. 等价关系 $\sim$ 将 M 中的投影分成等价类, 而对于每一等价类 $[p]$, 记 $c(p) := \sup_{q\in[p]} q$, 并称 $c(p)$ 为 p 的中心覆盖. 可以证明 $c(p)$ 是一个中心投影, 即 $c(p)$ 是在 M 的中心 $Z(M)$ 内的投影 (换句话说, 对于每一个 $x \in M$, 有 $c(p)x = xc(p)$).

我们把 M 内的投影中, 对于部份序 $\leq$ 的极小元素, 称为极小投影. 事实上, p 为 M 中的极小投影的充要条件为 $pMp = \mathbb{C}p$. 此时易见, 如果 $q \sim p$, 则 q 也是 M 中的极小投影. 可是, 只有比较少数的 W^*- 代数含有足够多的极小投影.

作为极小投影的 “推广”, 我们考虑 M 的交换投影: 如果 pMp 为交换的 W^*- 子代数, 则称 p 为交换投影. 事实上, p 为交换投影的充要条件为 $pMp = Z(M)p$, 这又相当于 p 是在所有以 $c(p)$ 为中心覆盖的投影中的极小者 (见文 [11, 419, 420 页]). 当 $M = B(H)$ 时, $Z(M) = \mathbb{C}$. 所

以, 交换投影就是极小投影. 如果 M 中每个非零的投影 p 都包含一个非零的交换投影 q, 则称 M 为离散型、或 I 型 W^*- 代数.

有些时候, 一个 W^*- 代数 M 甚至可能不具有任何非零的交换投影. 于是我们进一步考虑有限投影: 如果 p 包含一个和它自己等价的真子投影 q, 即 $p \sim q \lneq p$, 称 p 为 M 中的无限投影. 反之, 如果

$$p \sim q \leq p \implies p = q,$$

则称 p 为 M 中的有限投影. 易见交换投影必为有限投影. 如果 p 是有限投影且 $q \lesssim p$, 则 q 也是有限投影.

考虑 M 中的最大有限中心投影

$$z_{\mathfrak{f}} := \sup\{p \in M : p \text{ 是 } M \text{ 中的有限的中心投影}\}.$$

如果 $z_{\mathfrak{f}} = 1$, 称 M 为有限. 如果 $z_{\mathfrak{f}} = 0$, 称 M 为真无限. 在真无限的 W^*- 代数中的每个非零中心投影都是无限投影. 如果投影 p 不包含任何非零的有限投影, 则称 p 为纯无限投影. 我们考虑 M 中的最大纯无限中心投影

$$z_3 := \sup\{p \in M : p \text{ 是 } M \text{ 中的纯无限的中心投影}\}.$$

如果 $z_3 = 0$, 称 M 为半有限. 此时, 在 M 中的每个非零中心投影必包含一个有限子投影. 如果 $z_3 = 1$, 则称 M 为纯无限、或 Ⅲ 型 W^*- 代数. 若 M 没有任何非零的交换投影, 并且是半有限的, 则称 M 为 Ⅱ 型 W^*- 代数.

更进一步, 若 M 是 I 型 W^*- 代数, 且 M 同时为有限的 (对应地, 同时为真无限的), 则称 M 为 $\mathrm{I}_{\mathfrak{f}}$ 型 (对应地, I_∞ 型). 若 M 是 Ⅱ 型 W^*- 代数, 且 M 同时为有限的 (对应地, 同时为真无限的), 则称 M 为 $\mathrm{II}_{\mathfrak{f}}$ 型 (对应地, II_∞ 型).

Murray 和 von Neumann 利用 $\mathrm{I}_{\mathfrak{f}}$ 型、I_∞ 型、$\mathrm{II}_{\mathfrak{f}}$ 型、II_∞ 型和 Ⅲ 型对 W^*- 代数进行了完整的分类. 确切地说, 一般的 W^*- 代数 M 总可以分解成以上各型的弱* 闭理想的直和. 事实上, 若令

$$z_1 := \sup\{z \in M : z \text{ 是 } M \text{ 中使得 } Mz \text{ 是 I 型 } W^*\text{- 代数的中心投影}\},$$

并且 $z_2 := 1 - z_1 - z_3$, 则 $M_3 = z_3 M$ 为 M 的最大 Ⅲ 型弱*- 闭理想, $M_{1\mathfrak{f}} = z_{\mathfrak{f}} z_1 M$ 为最大 $\mathrm{I}_{\mathfrak{f}}$ 型弱*- 闭理想, $M_{1\infty} = (1 - z_{\mathfrak{f}}) z_1 M$ 为最大 I_∞ 型弱*- 闭理想, $M_{2\mathfrak{f}} = z_{\mathfrak{f}} z_1 M$ 为最大 $\mathrm{II}_{\mathfrak{f}}$ 型弱*- 闭理想, $M_{2\infty} = (1 - z_{\mathfrak{f}}) z_2 M$ 为最大 II_∞ 型弱*- 闭理想, 而且

$$M = M_{1\mathfrak{f}} \oplus M_{1\infty} \oplus M_{2\mathfrak{f}} \oplus M_{2\infty} \oplus M_3$$

(见文 [13, 定理 6.1.9]). 此时, 我们也知道 $M_1 := M_{1\mathfrak{f}} \oplus M_{1\infty}$ 是最大 I 型弱*- 闭理想, 而 $M_2 := M_{2\mathfrak{f}} \oplus M_{2\infty}$ 为最大 Ⅱ 型弱*- 闭理想. 从此, 很多 W^*- 代数的命题都可以通过分别考虑 $\mathrm{I}_{\mathfrak{f}}$ 型、I_∞ 型、$\mathrm{II}_{\mathfrak{f}}$ 型、II_∞ 型和 Ⅲ 型 W^*- 代数来得到证明.

鉴于 W^*- 代数的分类理论的成功, 人们希望能够对 C^*- 代数作出类似的分类. 然而, 由于一般 C^*- 代数缺乏足够多的投影, 不能直接移植 Murray 和 von Neumann 的方法.

文 [18] 利用 C^*- 代数 A 在其二次对偶 A^{**} 内的开投影来得出一类 Murray–von Neumann 分类. 开投影的概念最先由 Akemann 在文 [1] 中所引入. 令 p 为 A^{**} 中的投影. 如果存在 A 中单调上升的正元素网 $\{a_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ 弱*- 收敛于 p, 则称 p 为 A 的开投影; 同时称 $1 - p$ 为 A 的闭投

影. 当 X 是一个局部紧的 Hausdorff 空间时, C^*- 代数 $A := C_0(X)$ 的开投影一一对应于 X 的开集 (通过其特征函数表示). 一般而言, 通过对应

$$p \mapsto \mathrm{her}(p) := pA^{**}p \cap A,$$

我们知道 C^*- 代数 A 的开投影一一对应于 A 的可传 C^*- 子代数; 所谓可传 C^*- 子代数, 是指 A 的 C^*- 子代数 B 满足 $BAB \subseteq B$ (见文 [2–5, 7, 22, 23, 25]). 从谱分解理论也得知, C^*- 代数中的每一个元素皆落在由开投影所生成的线性闭包中.

另一方面, 延续 Cuntz 和 Pedersen 的思路和方法 [6], 本文作者在文 [20] 中, 利用 C^*- 代数中的正元素进行另一种 Murray–von Neumann 式的分类.

注意到, 在文 [8, 9, 26] 中, Elliott 和他的同仁创建了 Elliott 不变量 (它包含 C^*- 代数的 K- 理论和其迹态空间), 并且探讨那些可以用此不变量来作完整描述的可分核单 C^*- 代数的类型. 这种分类理论与 Murray 和 von Neumann 的分类、以及与本文作者在文 [18] 和 [20] 中所讨论的分类都不一样.

本文第 2 节介绍文 [18] 和 [20] 中的两套 Murray–von Neumann 式的分类理论. 第 3 节提出一个抽象的分类架构. 通过此抽象架构, 可以得到更多有关 C^*- 代数的 Murray–von Neumann 式的分类和分解理论. 我们希望此抽象的分类架构, 并其所产生的各种分类理论, 有助于人们对 C^*- 代数有更好的了解.

2 C^*- 代数两种新的 Murray–von Neumann 分类理论

2.1 利用开投影分类

要利用开投影来作分类, 首先需要考虑开投影上的等价关系. 在文献中, 已经在开投影上定义了数种不同的等价关系 [14, 21, 24], 而在文 [19] 中也讨论了各种常见的等价关系的异同. 本文作者在文 [18] 中, 选用了以下的等价关系.

定义 2.1 令 $p, q \in A^{**}$ 为 A 的开投影. 如果存在 A^{**} 中部份保距元 v, 使得

$$p = vv^*, \quad q = v^*v, \quad v^*\,\mathrm{her}(p)v = \mathrm{her}(q) \quad 及 \quad v\,\mathrm{her}(q)v^* = \mathrm{her}(p),$$

则称 p 和 q 空间等价, 并记为 $p \sim_{\mathrm{sp}} q$. 此时, 称可传 C^*- 子代数 $\mathrm{her}(p)$ 和 $\mathrm{her}(q)$ 为空间同构. 明显地, 空间同构的可传 C^*- 子代数一定是 *- 代数同构的.

可以证明 (见文 [18, 命题 2.7 (a)]): $p \sim_{\mathrm{sp}} q$ 当且仅当存在部分保距元 $w \in A^{**}$, 使得 $p = ww^*$, 并且

$$\{w^*rw : r \text{ 是小于 } p \text{ 的开投影}\} = \{s : s \text{ 是小于 } q \text{ 的开投影}\}.$$

换句话说, p 和 q 空间等价当且仅当存在 A^{**} 的部分保距元, 它同时给出所有 p 的子开投影与所有 q 的子开投影的 Murray–von Neumann 等价性.

定义 2.2 令 p, q 为 C^*- 代数 A 的开投影, 且 $p \le q$ (即 $pq = p$).

(a) p 在 q 中的闭包, $\bar{p}^q$, 是指那些 $\mathrm{her}(q)$ 的闭投影中, 包含 p 的最小的一个.

(b) 如果 $\bar{p}^q = q$, 则称 p 在 q 中稠密.

(c) 如果 $\mathrm{her}(p)$ 是交换的 C^*- 代数, 则称 p 为交换投影.

(d) 如果对 A 的任意比 p 小的开投影 r, s, 有

$$s \sim_{\mathrm{sp}} r \le s \implies \bar{r}^s = s,$$

则称 p 为 C^*- 有限投影.

注意到, p 在 q 中稠密等价于 $\mathrm{her}(p)$ 是 $\mathrm{her}(q)$ 的本原可传 C^*- 子代数; 意思是, 对于任意 $\mathrm{her}(q)$ 的非零可传 C^*- 子代数 D, 有 $\mathrm{her}(p)\cdot D\neq(0)$ (见文 [28]).

定义 2.3　令 A 为 C^*- 代数.

- 如果 A^{**} 的单位元 1 是 C^*- 有限的, 则称 A 为 C^*- 有限.
- 如果 A 的每一个非零开投影皆包含一个非零 C^*- 有限开投影, 则称 A 为 C^*- 半有限.
- 如果 A 的每一个非零中心开投影皆包含一个非零交换开投影, 则称 A 为 $\mathfrak{A}$ 型.
- 如果 A 没有非零的交换开投影, 但是 A 的每一个非零中心开投影包含一个非零 C^*- 有限开投影, 则称 A 为 $\mathfrak{B}$ 型.
- 如果 A 没有非零的 C^*- 有限开投影, 则称 A 为 $\mathfrak{C}$ 型.

命题 2.4 [18]　令 A 为 C^*- 代数.

(a) A 是 C^*- 有限当且仅当对 A 的每一个非零可传 C^*- 子代数 B 而言, 只有 B 的本原可传 C^*- 子代数才有可能和 B 空间同构.

(b) A 是 C^*- 半有限当且仅当 A 的每一个非零可传 C^*- 子代数皆包含一个非零 C^*- 有限可传 C^*- 子代数.

(c) A 是 $\mathfrak{A}$ 型当且仅当 A 的每一个非零闭理想皆包含一个非零的交换可传 C^*- 子代数.

(d) A 是 $\mathfrak{B}$ 型当且仅当 A 没有任何非零的交换可传 C^*- 子代数, 且 A 的每一个非零闭理想皆包含一个非零 C^*- 有限可传 C^*- 子代数.

(e) A 是 $\mathfrak{C}$ 型当且仅当 A 没有任何非零的 C^*- 有限可传 C^*- 子代数.

定理 2.5 [18]　令 A 为 C^*- 代数.

(i) 分别存在着 A 的最大 $\mathfrak{A}$ 型, $\mathfrak{B}$ 型, $\mathfrak{C}$ 型和 C^*- 半有限的可传 C^*- 子代数 $J_{\mathfrak{A}}$, $J_{\mathfrak{B}}$, $J_{\mathfrak{C}}$ 和 $J_{\mathfrak{sf}}$. 事实上, 它们是 A 中的理想.

(ii) $J_{\mathfrak{A}}$, $J_{\mathfrak{B}}$ 和 $J_{\mathfrak{C}}$ 两两互斥 (即 $J_{\mathfrak{A}}J_{\mathfrak{B}}=J_{\mathfrak{B}}J_{\mathfrak{C}}=J_{\mathfrak{C}}J_{\mathfrak{A}}=\{0\}$), 且 $J_{\mathfrak{A}}+J_{\mathfrak{B}}+J_{\mathfrak{C}}$ 是 A 的本原闭理想.

(iii) $J_{\mathfrak{A}}+J_{\mathfrak{B}}$ 是 $J_{\mathfrak{sf}}$ 的本原闭理想.

(v) 假设 C^*- 代数 A,B 是强 Morita 等价, 或者 A 是 B 的本原闭理想. 若 A 是 $\mathfrak{A}$ 型 (或 $\mathfrak{B}$ 型或 $\mathfrak{C}$ 型), 则 B 也是; 反之亦然.

(vi) 当 M 是 W^*- 代数时, $J_{\mathfrak{A}}^M=M_1$, $J_{\mathfrak{B}}^M=M_2$ 和 $J_{\mathfrak{C}}^M=M_3$.

所以, 利用开投影进行的 C^*- 代数分类是 W^*- 代数的 Murray–von Neumann 分类的推广.

例 2.6 [18]　(1) 如果无穷维的单 C^*- 代数 A 具有忠实的迹态, 则 A 是 $\mathfrak{B}$ 型. 特别地, 若 Γ 是无穷离散群, 且其群 C^*- 代数 $C_r^*(\Gamma)$ 是单的, 则 $C_r^*(\Gamma)$ 是 $\mathfrak{B}$ 型.

(2) 除了 $\mathscr{K}(H)$ 外, 每一个单的 AF- 代数皆是 $\mathfrak{B}$ 型.

2.2　利用正元素分类

鉴于 C^*- 代数 A 的开投影一般都不在 A 中, 使得对它们的操作可能不太容易, 本文作者在文 [20] 中也延续了 Cuntz 和 Pedersen 在文 [6] 中开始的工作, 并利用 A 中的正元素进行分类.

对于 $x\in A_+$, 如果可传 C^*- 子代数 $\mathrm{her}(x)=\overline{xAx}$ 是交换的, 则称 x 为 A 的交换正元 (见

文 [23, 191 页]). 对于正元素 $x, y \in A_+$, Cuntz 和 Pedersen 在文 [6] 中定义了如下的等价关系:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{存在 } A \text{ 中的序列 } \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \text{使得} \quad x = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} z_k^* z_k \quad \text{及} \quad y = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} z_k z_k^* \text{ 依范数收敛}.$$

如果对于所有 $y \in A_+$, 有

$$x \sim y \leq x \implies y = x,$$

则称 x 为 A 的有限正元.

对于一个 W^*- 代数中的投影 p, 可以证明 p 是在 Murray–von Neumann 意义之下有限的投影当且仅当 p 是在 Cuntz–Pedersen 意义之下有限的正元 [20].

定义 2.7 令 A 为 C^*- 代数.

- 若 A 中的每一个非零的正元都是有限的, 则称 A 为有限; 若 A 中的每一个非零的正元皆大于一个非零的有限正元, 则称 A 为半有限 (见文 [6, 140 页]).
- 若 A 没有任何非零的有限闭理想, 则称 A 为本原无限.
- 若 A 中的每一个非零的正元皆大于一个非零的交换正元, 则称 A 为离散(见文 [24, 定义 2.1]).
- 若 A 不包含非零的交换正元, 且为半有限, 则称 A 为 Ⅱ 型 (见文 [6, 149 页]).
- 若 A 不包含非零的有限正元, 则称 A 为 Ⅲ 型 (见文 [6, 149 页]).

由定义易见: 有限的 C^*- 代数的 C^*- 子代数也是有限的.

命题 2.8 [18, 20] (a) 一个 I 型的 C^*- 代数必是离散的, 并且有: 一个离散 C^*- 代数 A 是 I 型 C^*- 代数当且仅当对所有 A 的不可约表示 π, 商 C^*- 代数 $A/\ker\pi$ 皆是离散的.

(b) 一个 C^*- 代数 A 是半有限的当且仅当 A 的每一个非零可传 C^*- 子代数皆包含一个非零的有限可传 C^*- 子代数.

(c) 一个 C^*- 代数 A 是离散的当且仅当 A 的每一个非零闭理想皆包含一个非零的交换可传 C^*- 子代数.

(d) 一个 C^*- 代数 A 是 Ⅱ 型当且仅当 A 没有任何非零的交换可传 C^*- 子代数, 且 A 的每一个非零闭理想皆包含一个非零的有限可传 C^*- 子代数.

(e) 一个 C^*- 代数 A 是 Ⅲ 型当且仅当 A 没有任何非零的有限可传 C^*- 子代数.

注意到, 不是所有离散 C^*- 代数都为 I 型的. 例如 $\mathscr{B}(\ell^2)$ 是一个离散而非 I 型的 C^*- 代数.

定理 2.9 [20] (1) 假设 C^*- 代数 A 和 B 强 Morita 等价, 或者 A 是 B 的本原闭理想. 若 A 是离散 (又或是 Ⅱ 型, Ⅲ 型, 半有限), 则 B 也是; 反之亦然.

(2) 如果 A 是离散 (或者是 Ⅱ 型, Ⅲ 型, 半有限) 的 C^*- 代数, 则 A 的任何非零可传 C^*- 子代数同型.

(3) 一个 C^*- 代数 A 是 Ⅲ 型当且仅当所有 A 的非零可传 C^*- 子代数皆是本原无限.

对于 C^*- 代数 A 的子集 X, 记

$$X^\perp := \{a \in A : aX = \{0\} = Xa\}.$$

易见, $X^\perp$ 是 A 的可传 C^*- 子代数. 并且, 若 J 是 A 的理想, 则 $J^\perp$ 也是 A 的理想.

定理 2.10 [20] 令 A, B 为 C^*- 代数.

(a) 分别存在着 A 的最大离散, 半有限, Ⅱ 型和 Ⅲ 型的可传 C^*- 子代数 A_{d}, $A_{\mathfrak{sf}}$, A_{II} 和 A_{III}. 事实上, A_{d}, $A_{\mathfrak{sf}}$, A_{II} 和 A_{III} 皆是 A 的理想, 而且 A_{d}, A_{II} 和 A_{III} 两两互斥, 及 $A_{\mathrm{III}} \cap A_{\mathfrak{sf}} = \{0\}$.

(b) $A_{\mathrm{d}} + A_{\mathrm{II}} + A_{\mathrm{III}}$ 是 A 的本原闭理想; 另一方面, $A_{\mathrm{d}} + A_{\mathrm{II}}$ 是 $A_{\mathfrak{sf}}$ 的本原闭理想.

(c) 在 A/A_{d} 中没有非零的交换正元, $A/(A_{\mathrm{II}} + A_{\mathrm{III}})^{\perp\perp}$ 是离散的, A/A_{III} 是半有限的, 而且 $A/A_{\mathfrak{sf}}$ 是 Ⅲ 型.

(d) 若 A 半有限, 则 A/A_{II} 离散, 且 A/A_{d} 是 Ⅱ 型.

(e) 若 B 是 A 的可传 C^*- 子代数, 则 $B_{\mathrm{d}} = A_{\mathrm{d}} \cap B$, $B_{\mathfrak{sf}} = A_{\mathfrak{sf}} \cap B$, $B_{\mathrm{II}} = A_{\mathrm{II}} \cap B$ 及 $B_{\mathrm{III}} = A_{\mathrm{III}} \cap B$.

(f) 分别存在着 A 的最大有限闭理想 $A_{\mathfrak{f}}$ 和最大本原无限闭理想 A_∞. 此时, $A_{\mathfrak{f}} \cap A_\infty = \{0\}$, 而且 $A_{\mathfrak{f}} + A_\infty$ 是 A 的本原闭理想.

(g) $A/A_{\mathfrak{f}}$ 是本原无限的, 而 A/A_∞ 是有限的.

(h) 若 A 离散、半有限、或是 Ⅱ 型, 则 $A/A_{\mathfrak{f}}$ 和 A/A_∞ 也一样.

(i) $A_{\mathrm{d},\mathfrak{f}} := A_{\mathrm{d}} \cap A_{\mathfrak{f}}$ 和 $A_{\mathrm{II},\mathfrak{f}} := A_{\mathrm{II}} \cap A_{\mathfrak{f}}$ 分别是 A 的最大有限离散闭理想和最大有限 Ⅱ 型闭理想.

(j) $A_{\mathrm{d},\infty} := A_{\mathrm{d}} \cap A_\infty$ 和 $A_{\mathrm{II},\infty} := A_{\mathrm{II}} \cap A_\infty$ 分别是 A 的最大本原无限离散闭理想和最大本原无限 Ⅱ 型闭理想.

(k) $A_{\mathrm{d},\mathfrak{f}} + A_{\mathrm{d},\infty} + A_{\mathrm{II},\mathfrak{f}} + A_{\mathrm{II},\infty} + A_{\mathrm{III}}$ 是 A 的本原闭理想.

(l) 若 A 是 W^*- 代数, 则 $A_{\mathrm{d}} = A_1$, $A_{\mathrm{II}} = A_2$, $A_{\mathrm{d},\mathfrak{f}} = A_{1\mathfrak{f}}$, $A_{\mathrm{d},\infty} = A_{1\infty}$, $A_{\mathrm{II},\mathfrak{f}} = A_{2\mathfrak{f}}$, $A_{\mathrm{II},\infty} = A_{2\infty}$ 和 $A_{\mathrm{III}} = A_3$.

以下, 称具有形式 $J^\perp$ 的理想为 A 的正规理想. 不难看出, W^*- 代数的理想是正规理想当且仅当它是弱*- 闭的 (当然, 在 W^*- 代数理论中所考虑的理想通常都假设是弱*- 闭的). 另一方面, 一个 C^*- 代数 A 为素 (就是说, (0) 是 A 的素理想) 当且仅当 A 不包含任何非平凡的正规理想. 因此, 对应于 W^*- 代数理论中的 "因子", 素 C^*- 代数可以看成是 C^*- 代数中最基本的代数.

命题 2.11 [20] 任何素 C^*- 代数必为以下五者中的一型: 有限离散, 本原无限离散, 有限 Ⅱ 型, 本原无限 Ⅱ 型, 或 Ⅲ 型.

例 2.12 [20] (1) 有限离散的素 C^*- 代数必是矩阵代数.

(2) 本原无限的离散素 C^*- 代数必然包含一个同构于 $\mathscr{K}(H)$ 的本原闭理想, 其中 H 为一个无穷维的 Hilbert 空间.

(3) 对于可数的 ICC 群 Γ, 它的群 C^*- 代数 $C^*_r(\Gamma)$ 是有限 Ⅱ 型素 C^*- 代数.

(4) 如果一个不具有迹态的单 AF- 代数 A 不 *- 同构于任何 $\mathscr{K}(H)$, 则 A 是本原无限离散 Ⅱ 型的素 C^*- 代数.

(5) Calkin 代数是 Ⅲ 型的素 C^*- 代数.

若我们比较以上两种分类方法, 则有

定理 2.13 [18, 20] 令 A 是 C^*- 代数.

(i) A 是 $\mathfrak{A}$ 型当且仅当 A 离散.

(ii) 若 A 是半有限, 则 A 是 C^*- 半有限.

(iii) 若 A 是 Ⅱ 型, 则 A 是 $\mathfrak{B}$ 型.

(v) 若 A 是 $\mathfrak{C}$ 型, 则 A 是 Ⅲ 型.

到目前为止, 我们不知道 $\mathfrak{B}$ 型的 C^*- 代数是否必为 Ⅱ 型; 换句话说, 我们不确定利用开投影和利用正元素来对 C^*- 代数进行分类是否重合.

3 抽象的分类架构

本节将提出一个抽象的分类架构, 它能用来给出以上两种分类方案. 我们也会利用它探讨这两个方案的等价性.

假设 $\mathscr{P}$ 是一个关于 C^*- 代数的性质. 如果每一个具有性质 $\mathscr{P}$ 的 C^*- 代数的所有可传 C^*- 子代数也具有性质 $\mathscr{P}$, 则我们说 $\mathscr{P}$ 是可传稳定.

考虑一列关于 C^*- 代数的可传稳定性质 $\{\mathscr{P}_1,\dots,\mathscr{P}_n\}$. 如果对于任意 $k=2,\dots,n$, 性质 $\mathscr{P}_{k-1}$ 皆强于性质 $\mathscr{P}_k$, 并且平凡 C^*- 代数 (0) 满足性质 $\mathscr{P}_1$, 则称这列性质为相容. 此时, 令性质 $\mathscr{P}_0$ 为: "该 C^*- 代数的维数是 0" (即 A 满足 $\mathscr{P}_0$ 当且仅当 $A=(0)$). 再者, 也令性质 $\mathscr{P}_{n+1}$ 为以下一个恒真命题: "该 C^*- 代数包含零元".

定义 3.1 设 $\{\mathscr{P}_1,\dots,\mathscr{P}_n\}$ 为一列相容的可传稳定性质, 而 A 是一个 C^*- 代数. 对于 $k=1,\dots,n+1$, 假设 A 没有任何满足性质 $\mathscr{P}_{k-1}$ 的非零可传 C^*- 子代数, 并且 A 的任何非零闭理想皆包含一个满足性质 $\mathscr{P}_k$ 的非零可传 C^*- 子代数, 则称 A 为 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型.

在下文中, 若 A 是 C^*- 代数 D 的本原闭理想, 则称 D 为 A 的本原扩张. 另一方面, 若从 A 到其商 C^*- 代数 B 的商映射的核是一个正规理想 (就是说, 具有形式 $J^\perp$ 的理想), 则称 B 为 A 的正规商代数.

应用类似于在文 [20] 中相应的命题的证明方法, 可以得到以下定理.

定理 3.2 令 $\{\mathscr{P}_k\}_{k=1,\dots,n}$ 为一列有关 C^*- 代数的相容可传稳定性质. 令 A 为一个 C^*- 代数, 及 $k\in\{1,\dots,n+1\}$.

(a) 如果 A 中每一个非零闭理想皆包含一个满足性质 $\mathscr{P}_k$ 的非零可传 C^*- 子代数, 则 A 中每一个非零可传 C^*- 子代数皆包含一个满足性质 $\mathscr{P}_k$ 的非零可传 C^*- 子代数.

(b) 如果 A 强 Morita 等价于某一个 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型 C^*- 代数, 则 A 也是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型的.

(c) $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型 C^*- 代数的可传 C^*- 子代数也是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型.

(d) 如果 A 是一个 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型 C^*- 代数的本原扩张, 则 A 也是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型. 特别地, 若 A 是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型, 则它的乘子代数 $M(A)$ 和它的单位化代数 A^1 (当 A 没有单位元时) 都是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型的.

(e) 存在着 A 中最大的 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型可传 C^*- 子代数 $J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$, 它同时也是 A 的理想.

(f) $J^A_{\mathscr{T}_1^{\mathscr{P}}},\dots,J^A_{\mathscr{T}_{n+1}^{\mathscr{P}}}$ 两两互斥, 而 $J^A_{\mathscr{T}_1^{\mathscr{P}}}+\cdots+J^A_{\mathscr{T}_{n+1}^{\mathscr{P}}}$ 是 A 的本原闭理想.

(g) 如果 A的每一个非零闭理想皆包含一个满足性质 $\mathscr{P}_k$的非零可传 C^*- 子代数, 则 $A/J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$ 的每一个非零闭理想皆包含一个满足性质 $\mathscr{P}_{k-1}$ 的非零可传 C^*- 子代数.

(h) $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型 C^*- 代数 A 的正规商代数 B 也是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型的.

(i) $J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$ 是正规理想.

(j) $A/(J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}})^\perp$ 是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型 C^*- 代数. 更进一步, 若一个 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型 C^*- 代数 B 是 A 的正规商代数, 则对应的商映射 $Q:A\to B$ 将会经过商映射 $q:A\to A/(J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}})^\perp$ 来分解.

(k) 如果 A 是素 C^*- 代数, 则 A 恰巧为某一 $\mathscr{T}_j^{\mathscr{P}}$ 型, 其中 $j=1,\dots,n+1$.

以上定理的证明, 需要用到以下命题 (见文 [20, 引理 3.2] 的证明, 及文 [20, 注释 2.3 (c), (d)

和命题 2.1 (c)]).

命题 3.3 假设 A 和 B 是两个的 C^*- 代数.

(1) 设 $\mathscr{P}$ 是一个可传稳定的性质. 若 A 和 B 强 Morita 等价, 而 A 包含一个非零的可传 C^*- 子代数满足性质 $\mathscr{P}$, 则 B 也包含一个非零的可传 C^*- 子代数满足性质 $\mathscr{P}$.

(2) 若 B 是 A 的可传 C^*- 子代数, 并且由 B 所生成的闭理想就是 A, 则 A 和 B 是强 Morita 等价的.

(3) 若 A 和 B 强 Morita 等价, 则存在从 A 的所有闭理想到 B 的所有闭理想的一一对应, 使得对于每个 A 的闭理想 I, C^*- 代数 I 和与之对应的 B 中的闭理想是强 Morita 等价的.

(4) 若 B 是 A 的可传 C^*- 子代数, 而 I 和 J 是 A 的闭理想满足 $B \subseteq I + J$, 则 $B \cap I \neq (0)$ 或 $B \cap J \neq (0)$.

以上命题的 (3) 和 (4) 是众所周知的结果, 而 (2) 的证明需要通过考虑闭子集 $\overline{AB} \subseteq A$ 作为 Hilbert B- 模. 至于 (1) 的证明, 则需要用到开投影与可传 C^*- 子代数的一一对应关系, 并以下 Peligrad 和 Zsidó 的定理:

定理 3.4 (见文 [24, 定理 1.9]) 若 A 是一个 C^*- 代数, 而 p, q 是 A 的非零开投影, 能找到开投影 e_0, e_1, f_0, f_1, 满足

$$\begin{aligned}&e_0, e_1 \leq p, \quad f_0, f_1 \leq q, \quad e_0 e_1 = 0, \quad f_0 f_1 = 0,\\&\overline{e_0 + e_1}^p = p, \quad \overline{f_0 + f_1}^q = q, \quad c(e_0)c(f_0) = 0, \quad \text{并且} \quad \mathrm{her}(e_1) \cong \mathrm{her}(f_1).\end{aligned}$$

请注意, 在文 [24, 定理 1.9] 中, 最后一个性质其实是 $e_1 \sim_{\mathrm{PZ}} f_1$, 当中 $\sim_{\mathrm{PZ}}$ 是文 [24] 中定义的等价关系 (下文会有讨论), 但由于 $\sim_{\mathrm{PZ}}$ 比 $\sim_{\mathrm{sp}}$ 强, 由此可得

$$\mathrm{her}(e_1) \cong \mathrm{her}(f_1).$$

定理 3.2 的证明思路如下:

(a) 此部分的证明从命题 3.3 (a) 和 (b) 给出.

(b) 此部分可由命题 3.3 (a) 和 (c) 获得.

(c) 此部分可从定义和 (a) 得到.

(d) 此部分直接从定义而来.

(e) 通过开投影和可传 C^*- 子代数的一一对应, 并命题 3.3 (d), 可以证明所有 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型闭理想之和的范数闭包 $J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$ 也是一个 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型 C^*- 代数. 通过 (b) 和命题 3.3 (b), 可知 $J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$ 包含所有 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型可传 C^*- 子代数.

(f) 不同的 $J^A_{\mathscr{T}_j^{\mathscr{P}}}$ 之间的两两互斥性可从定义直接得到. 为要证明第二个命题, 先考虑 A 的一个任意的非零闭理想 I, 并令

$$m := \max \big\{k \in \{0, \ldots, n\} : I \text{ 不包含一个满足 } \mathscr{P}_k \text{ 的非零可传 } C^*\text{- 子代数}\big\}, \tag{3.1}$$

则 I 必定包含一个满足 $\mathscr{P}_{m+1}$ 的非零可传 C^*- 子代数 B. 若 J 是由 B 所生成的闭理想, 我们从 (b) 和命题 3.3 (b) 得知 $J \subseteq J^A_{\mathscr{T}_{m+1}^{\mathscr{P}}}$, 因而 $B \subseteq I \cap J^A_{\mathscr{T}_{m+1}^{\mathscr{P}}}$.

(g) 令 $\tau : A \to A/J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$ 为商映射, 并 I 为 $A/J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$ 的一个闭理想, 而且设 $I' := \tau^{-1}(I)$. 若 I' 不包含任何满足性质 $\mathscr{P}_{k-1}$ 的非零可传 C^*- 子代数, 则从前设知 $I' \subseteq J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$ 并得出如下矛盾: $I = \tau(I') = (0)$. 因此, I' 包含一个非零的、满足性质 $\mathscr{P}_{k-1}$ 的可传 C^*- 子代数 B. 由于 $J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$ 是

$\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型的, 我们知道 $B \cap J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}} = (0)$. 所以, $\tau(B) \cong B$ 是 I 内满足性质 $\mathscr{P}_{k-1}$ 的非零可传 C^*-子代数.

(h) 令 $Q: A \to B$ 为商映射, 则从前设, 存在 A 的一个闭理想 J 满足 $\ker Q = J^\perp$. 从 (c) 和 (d), 可知 $M(J)$ 也是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型. 若 $\theta: A \to M(J)$ 是那标准的映射, 则 $\ker\theta = \ker Q$. 由此可知, $B \cong A/\ker\theta$ 可以看为是 J 的本原扩张. 因而从 (d), 得知 B 也是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型的.

(i) 设 $I_k := \sum_{j\neq k} J^A_{\mathscr{T}_j^{\mathscr{P}}}$. 从 (f) 知 $J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}} \subseteq I_k^\perp$. 反过来, 我们将会证明 $I_k^\perp$ 是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型的 (因而 $I_k^\perp \subseteq J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$). 事实上, 假设存在 $I_k^\perp$ 的非零可传 C^*- 子代数 B, 它不包含任何满足 $\mathscr{P}_k$ 的非零可传 C^*- 子代数. 此时, 存在最小的整数 $m \in \{k+1, \ldots, n+1\}$, 使得 B 包含一个满足 $\mathscr{P}_m$ 的非零可传 C^*- 子代数 D. 易知 D 是 $\mathscr{T}_m^{\mathscr{P}}$ 型, 但此与 $D \subseteq I_k^\perp$ 矛盾. 相似地, 若 $I_k^\perp$ 包含一个满足性质 $\mathscr{P}_{k-1}$ 的非零可传 C^*- 子代数, 也会得出矛盾.

(j) 若 $\theta: A \to M(J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}})$ 是那标准的映射, 则 $\ker\theta = (J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}})^\perp$. 因此, $A/(J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}})^\perp$ 可以看成是 $J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$ 的本原扩张. 从 (d) 得知 $A/(J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}})^\perp$ 是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型的. 另一方面, 从前设得知存在 A 的闭理想 J 满足 $\ker Q = J^\perp$. 与以上证明相仿, 透过从 A 到 $M(J)$ 的标准映射, B 可以看成是 J 的本原扩张. 从而, (c) 告诉我们 J 也是 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型的; 也就是说, $J \subseteq J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}}$. 所以, 我们知道存在 *- 同态 $\varphi: A/(J^A_{\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}})^\perp \to B$, 使得 $Q = \varphi \circ q$.

(k) 因为素 C^*- 代数没有非平凡的正规理想, 这部分从 (i) 可以直接得到. 证毕.

对于一个 C^*- 代数 A, 记 $\mathscr{S}_k$ 为 A 的所有满足 $\mathscr{P}_k$ 的闭理想所组成的集合, 并令

$$A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_k} := \{x \in A: \text{ 对于所有 } I \in \mathscr{S}_k, \text{有 } xI = (0)\} \quad \text{以及} \quad A_{\mathscr{P}_k} := A^\perp_{\mathrm{n}\mathscr{P}_k},$$

则 $A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_k}$ 是 A 内最大的反 $\mathscr{P}_k$ 闭理想; 在此, 反 $\mathscr{P}_k$ 的意思是说, $A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_k}$ 不包含任何满足 $\mathscr{P}_k$ 的非零闭理想. 由于 $A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_k}$ 是正规理想 (注意到, $A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_k} = (\sum_{I\in\mathscr{S}_k} I)^\perp$), 有 $A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_k} = A^\perp_{\mathscr{P}_k}$. 对于所有 $l \in \{k+1, \ldots, n+1\}$, 易知 $J^A_{\mathscr{T}_l^{\mathscr{P}}} \subseteq A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_k}$. 另一方面, 对于任意 $j \in \{1, \ldots, k\}$, 容易看出 $J^A_{\mathscr{T}_j^{\mathscr{P}}} \cap A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_k}$ 是最大的 $\mathscr{T}_j^{\mathscr{P}}$ 型反 $\mathscr{P}_k$ 闭理想, 并且 $J^A_{\mathscr{T}_j^{\mathscr{P}}} \cap A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_k}$ 和 $J^A_{\mathscr{T}_j^{\mathscr{P}}} \cap A_{\mathscr{P}_k}$ 都是正规理想 (由于 $I^\perp \cap J^\perp = (I+J)^\perp$). 因此, 一个素 C^*- 代数必然重合于某一个 $J^A_{\mathscr{T}_j^{\mathscr{P}}} \cap A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_k}$ 或 $J^A_{\mathscr{T}_j^{\mathscr{P}}} \cap A_{\mathscr{P}_k}$, 其中 $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, k\}$.

现在, 假设对于某一个固定的 $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, 以下句子成立:

性质 $\mathscr{P}_{k_0}$ 在本原扩张和任意的 C^*- 代数直和下保持.

对于 $I, J \in \mathscr{S}_{k_0}$, 因为

$$(I\cap J)^\perp \cap I + I \cap J + (I \cap J)^\perp \cap J$$

是 $I+J$ 的本原理想 (由于命题 3.3 (d)), 所以, 从假设得知 $I + J \in \mathscr{S}_{k_0}$. 再进一步, 考虑 A 内一族极大的、两两互斥的、满足性质 $\mathscr{P}_{k_0}$ 的闭理想 $\{I_j\}_{j\in\mathfrak{I}}$, 并令 $I := \bigoplus_{j\in I} I_j$. 若 $\theta: A \to M(I)$ 是那标准的映射, 则不难看出 $\ker\theta = A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_{k_0}}$. 因此, $A/A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_{k_0}}$ 可以看成是 I 的本原扩张. 以上关于 $\mathscr{P}_{k_0}$ 的假设告诉我们 $A/A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_{k_0}}$ 满足性质 $\mathscr{P}_{k_0}$. 再者, 由于 $A_{\mathscr{P}_{k_0}} = A^\perp_{\mathrm{n}\mathscr{P}_{k_0}}$ 可以看成是 $A/A_{\mathrm{n}\mathscr{P}_{k_0}}$ 的闭理想, 我们知道 $A_{\mathscr{P}_{k_0}}$ 是 A 的最大的、满足 $\mathscr{P}_{k_0}$ 的闭理想, 并且有

$$A_{\mathscr{P}_{k_0}} = \sum_{I\in\mathscr{S}_{k_0}} I.$$

上面的讨论不但给出第 2 节中的 A_{f} 和 A_∞, 也告诉我们: 一个 C^*- 代数 A 必然包含一个最大交换闭理想, 和一个最大反交换闭理想, 而它们的直和是 A 的本原理想 (原因是, C^*- 代数的交换性也是在本原扩张和任意的 C^*- 代数直和下保持的). 事实上, 不难看出可传 C^*- 子代数 $\{xy-yx : x, y \in A\}^\perp$ 其实是一个理想, 并且是 A 的最大交换闭理想, 从而 A 的最大反交换闭理想就是 $\{xy-yx : x, y \in A\}^{\perp\perp}$.

通过选取相容的可传稳定性质列, 以上的抽象分类架构提供很多 C^*- 代数分类方案. 然而, 对于不同的性质列, 是有可能得到相同的方案的. 以下, 我们将为此作一初步的考量.

假设 $\{\mathscr{P}_k\}_{k=1,\dots,n}$ 和 $\{\mathscr{P}'_k\}_{k=1,\dots,n}$ 是两个有关 C^*- 代数的相容可传稳定性质列. 如果对于所有 $k=1,\dots,n$, 每一个满足性质 $\mathscr{P}_k$ 的非零 C^*- 代数皆包含一个满足性质 $\mathscr{P}'_k$ 的非零可传 C^*- 子代数, 并且反之亦然, 则称这两列性质可传等价.

命题 3.5 设 $\{\mathscr{P}_k\}_{k=1,\dots,n}$ 和 $\{\mathscr{P}'_k\}_{k=1,\dots,n}$ 为两列有关 C^*- 代数的相容可传稳定性质, 则这两列性质是可传等价的当且仅当 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型 C^*- 代数皆重合于 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}'}$ 型 C^*- 代数 (对于所有 $k=1,\dots,n+1$).

证明 充份性是显然的. 现在假设所有 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}}$ 型的 C^*- 代数重合于 $\mathscr{T}_k^{\mathscr{P}'}$ 型的 C^*- 代数 (对于所有 $k=1,\dots,n+1$). 如果某一 C^*- 代数 A 满足性质 $\mathscr{P}_k$, 则对于任意 $l>k$, 有 $J^A_{\mathscr{T}_l^{\mathscr{P}}}=\{0\}$ (其中 $J^A_{\mathscr{T}_l^{\mathscr{P}}}$ 是定理 3.2 (e) 中的理想); 因而存在着某个 $1\le j\le k$, 使得 $J^A_{\mathscr{T}_j^{\mathscr{P}'}}=J^A_{\mathscr{T}_j^{\mathscr{P}}}\neq\{0\}$ (由于定理 3.2 (f)). 因此, A 必然包含一个满足性质 $\mathscr{P}'_j$ 的非零可传 C^*- 子代数 B. 由于性质 $\mathscr{P}'_j$ 比性质 $\mathscr{P}'_k$ 强, B 也满足性质 $\mathscr{P}'_k$. 再由对称性, 可以得到这两列性质的可传等价性. 证毕.

在第 2 节中讨论过两套不同的 C^*- 代数分类方案, 它们都是上面的抽象架构的特例. 事实上, 若记 $\mathscr{P}_{\mathrm{Ab}}$ 为性质: "该 C^*- 代数是交换的", 而 $\mathscr{P}_{\mathrm{Cfin}}$ 和 $\mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}$ 分别为性质: "该 C^*- 代数是 C^*- 有限的" 和 " 该 C^*- 代数是有限的", 则 $\{\mathscr{P}_{\mathrm{Ab}}, \mathscr{P}_{\mathrm{Cfin}}\}$ 和 $\{\mathscr{P}_{\mathrm{Ab}}, \mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}\}$ 是两列相容的可传稳定性质, 它们分别产生分类方案 $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$ 和 $\{$离散$, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$. 从定理 2.13 知, II 型 C^*- 代数必为 $\mathfrak{B}$ 型的, 而 $\mathfrak{C}$ 型 C^*- 代数必为 III 型的, 而命题 3.5 告诉我们, 若每个非零的 C^*- 有限 C^*- 代数都包含一个非零的有限 C^*- 可传子代数, 或等价地,

若每个非零的 C^*- 有限 C^*- 代数都包含一个非零有限正元,

则分类方案 $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$ 和 $\{$离散$, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$ 事实上是相同的.

以上所用的 C^*- 有限性质是由 C^*- 代数的开投影上的空间等价来定义的. 在文献中, 还有另一些定义在开投影上的等价关系. 例如, 上文曾提到, Peligrad 和 Zsidó 在文 [24, 定义 1.1] 中, 给出等价关系 $\sim_{\mathrm{PZ}}$. 现在复述一下这定义:

$$p \sim_{\mathrm{PZ}} q \Leftrightarrow \text{ 存在 } A \text{ 中的部份保距元 } v, \text{ 使得}$$
$$p = vv^*, \quad q = v^*v, \quad v^*\,\mathrm{her}(p) \subseteq A \ \text{ 及 } \ v\,\mathrm{her}(q) \subseteq A.$$

不难看出, 对于 A 的开投影 p, q, 有

$$p \sim_{\mathrm{PZ}} q \implies p \sim_{\mathrm{sp}} q.$$

然而, 对于某些 C^*- 代数, $\sim_{\mathrm{PZ}}$ 和 $\sim_{\mathrm{sp}}$ 并不相同 (见文 [19, 定理 5.3]). 在文 [21, 命题 4.3] 和文 [19, 命题 3.1] 中, 对于 $\sim_{\mathrm{PZ}}$ 有详细的刻画.

通过 $\sim_{\mathrm{PZ}}$ 可以定义 C^*- 代数的另一种有限性. 若对于每一对 C^*- 代数 A 的开投影 r, s, 有

$$s \sim_{\mathrm{PZ}} r \le s \implies \bar{r}^s = s,$$

则称 A 为 PZ- 有限 (就是说, 在 C^*- 有限性的定义中, 把 $\sim_{\mathrm{sp}}$ 改为 $\sim_{\mathrm{PZ}}$). 从上面的比较, 知道 C^*- 有限 C^*- 代数一定是 PZ- 有限的. 下面, 给出 PZ- 有限 C^*- 代数的一个等价刻画.

命题 3.6 设 A 是一个 C^*- 代数. 对于 $y \in A$, 记 $\mathrm{her}(y) := \overline{y^*Ay}$.

(a) 假设 A 为 PZ- 有限. 对于所有 $a \in A_+$, 若 $x \in \mathrm{her}(a)$ 满足 $x^*x = a$, 则 $\mathrm{her}(a)$ 的右理想 $R := \{y \in \mathrm{her}(a) : x^*y = 0\}$ 等于 $\{0\}$.

(b) 如果 A 可分, 则 (a) 中的第二句话等价于 A 的 PZ- 有限性.

证明 (a) 当 $a = 0$ 时, 结论显然. 当 $a \neq 0$ 时, 可以假设 $\|a\| = 1$. 令 q, r 为 A 的开投影, 使得 $\mathrm{her}(q) = \mathrm{her}(a)$ 及 $\mathrm{her}(r) = \mathrm{her}(x^*) \subseteq \mathrm{her}(a)$ (请注意: $x^* \in \mathrm{her}(a)$). 如果 $x = ua^{1/2}$ 是 x 的极分解, 则 $u^*u = q$, 并且

$$\mathrm{her}(r) = u\,\mathrm{her}(q)u^*, \quad u\,\mathrm{her}(q) \subseteq \overline{xAa^{1/2}} \subseteq \mathrm{her}(a)$$

及

$$u^*\,\mathrm{her}(r) \subseteq \overline{a^{1/2}Ax^*} \subseteq \mathrm{her}(a).$$

于是, $q \sim_{\mathrm{PZ}} r \leq q$. 假设 $R \neq \{0\}$, 则 $B := R \cap R^*$ 是 $\mathrm{her}(a)$ 的非零可传 C^*- 子代数, 满足 $\mathrm{her}(x^*) \cdot B = \{0\}$. 因此, $\bar{r}^q \neq q$. 但这与 A 的 PZ- 有限性假设矛盾.

(b) 假设 (a) 中的条件成立, 但存在 A 的开投影 q, r, 满足 $q \sim_{\mathrm{PZ}} r \leq q$ 和 $\bar{r}^q \neq q$. 由于 A 可分, 所以存在着 $a, b \in \mathrm{her}(q)_+$, 使得

$$\|a\| = \|b\| = 1, \quad \mathrm{her}(q) = \mathrm{her}(a) \ \text{ 及 } \ \mathrm{her}(r) = \mathrm{her}(b)$$

(见文 [15, 定理 3.2.5]). 因为 r, q 作为 $\mathrm{her}(a)$ 的开投影满足 $r \sim_{\mathrm{PZ}} q$, 所以, 从文 [21, 命题 4.3], 可以找到 $x \in \mathrm{her}(a)$, 使得 $x^*x = a$ 和 $xx^* = b$. 既然 $\bar{r}^q \lneq q$, 必定存在 $\mathrm{her}(q)$ 的非零可传 C^*- 子代数 B 满足 $\mathrm{her}(r) \cdot B = \{0\}$. 此时, 取出任意 $y \in B \setminus \{0\}$, 有 $b^{1/2}y = 0$. 所以, $y \in R$. 但这与 $R = \{0\}$ 矛盾. 证毕.

若定义性质 $\mathscr{P}_{\mathrm{PZfin}}$ 为: 该 C^*- 代数为 PZ- 有限, 则 $\{\mathscr{P}_{\mathrm{Ab}}, \mathscr{P}_{\mathrm{PZfin}}\}$ 是相容的可传稳定性质列, 而通过上述的抽象分类架构, 所得到的类似 $\mathfrak{B}$ 型的性质, 我们称之为 $\mathfrak{B}'$ 型. 易知 $\mathfrak{B}'$ 型弱于原来的 $\mathfrak{B}$ 型. 与上文相似, 我们可以问:

是否每个非零的 PZ- 有限 C^*- 代数都包含一个非零有限正元?

若此问题有正面的答案, 则 $\mathfrak{B}'$ 型, $\mathfrak{B}$ 型和 II 型三者相同.

最后, 也可以利用以上的抽象架构来细化第 2 节中的两套分类方案. 以下就是一个细化的例子. 定义性质 $\mathscr{P}_{\mathrm{Fd}}$ 为: 该 C^*- 代数是交换的并且有限维的, 则对于 $* = \mathrm{Fin}, \mathrm{Cfin}, \mathrm{PZfin}$, 可传稳定的性质列 $\{\mathscr{P}_{\mathrm{Fd}}, \mathscr{P}_{\mathrm{Ab}}, \mathscr{P}_*\}$ 也是相容的. 利用这一列性质, 可以得到 $\mathfrak{A}$ 型 (就是说, 离散型) 的细分: $\mathfrak{A}_{\mathrm{mp}}$ 型和 $\mathfrak{A}_{\mathrm{nfd}}$ 型. 准确地说, 一个 C^*- 代数是 $\mathfrak{A}_{\mathrm{mp}}$ 型当且仅当它的每个非零闭理想皆包含一个非零的有限维交换可传 C^*- 子代数. 而它是 $\mathfrak{A}_{\mathrm{nfd}}$ 型, 当且仅当它是 $\mathfrak{A}$ 型, 并且它没有非零的有限维交换可传 C^*- 子代数.

不难看出, 一个 C^*- 代数是 $\mathfrak{A}_{\mathrm{mp}}$ 型当且仅当它的每个非零闭理想 I 皆包含一个 "极小投影"; 就是说, 存在一个投影 $p \in I$, 满足 $pIp = \mathbb{C}p$. 因此, I 型的 C^*- 代数不一定为 $\mathfrak{A}_{\mathrm{mp}}$ 型. 从下面例子 3.7 (a), 我们也知 $\mathfrak{A}_{\mathrm{mp}}$ 型 C^*- 代数不一定是 I 型的. 另一方面, 有限维 C^*- 代数是 I 型而非 $\mathfrak{A}_{\mathrm{nfd}}$ 型的, 而下面例子 3.7 (b), 就是一个 $\mathfrak{A}_{\mathrm{nfd}}$ 型而非 I 型的 C^*- 代数.

在每一个 C^*- 代数 A 上, 都存在最大的 $\mathfrak{A}_{\mathrm{mp}}$ 型闭理想 A_{mp} 和最大的 $\mathfrak{A}_{\mathrm{nfd}}$ 型闭理想 A_{nfd}, 满足

$$A_{\mathrm{mp}} \cap A_{\mathrm{nfd}} = (0),$$

使得 $A_{\mathrm{mp}} + A_{\mathrm{nfd}}$ 是 A_{d} 的本原闭理想.

设 B 是一个 $\mathfrak{A}_{\mathrm{mp}}$ 型 C^*- 代数, $\mathscr{E}$ 是 B 内一族极大的、两两正交的 "极小投影" (两两正交的意思是说, 对于任意 $p, q \in \mathscr{E}$, 有 $pq = 0$), 而 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathscr{E}$ 内所有非空有限子集的全体. 对于 $F \in \mathfrak{F}$, 我们知道

$$B_F := \Big(\sum_{p\in F} p\Big) B \Big(\sum_{p\in F} p\Big)$$

是有限维 C^*- 代数. 再者, 可传 C^*- 子代数

$$B_0 := \overline{\bigcup_{F\in\mathfrak{F}} B_F}$$

可以写成 Hilbert 空间上的紧算子代数的 C^*- 代数直和. 由于 B 是 $\mathfrak{A}_{\mathrm{mp}}$ 型, B_0 必然是 B 的本原可传 C^*- 子代数. 可是, 一般来说, $B_0 \neq B$.

另一方面, 由于性质 $\mathscr{P}_{\mathrm{Fd}}$ 在任意 C^*- 代数直和上不保持, 因此, 不一定存在最大的、满足 $\mathscr{P}_{\mathrm{Fd}}$ 的闭理想 (见下面例子 3.7 (c)). 但从上面的讨论, 一定存在最大的反 $\mathscr{P}_{\mathrm{Fd}}$ 闭理想.

例 3.7 (a) 若 $\{H_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ 是一族 Hilbert 空间, $A := \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} \mathscr{K}(H_i)$, 而 B 是任意的 C^*- 代数满足 $A \subseteq B \subseteq M(A)$, 则 B 是 $\mathfrak{A}_{\mathrm{mp}}$ 型. 特别地, 所有 $\mathfrak{A}$ 型素 C^*- 代数都是 $\mathfrak{A}_{\mathrm{mp}}$ 型的.

(b) $A := C\big([0,1]; \mathscr{B}(\ell^2)\big)$ 是一个非 I 型的离散 C^*- 代数 (原因是, A 的商代数 $\mathscr{B}(\ell^2)$ 不是 I 型的, 而且 A 是 $C\big([0,1]; \mathscr{K}(\ell^2)\big)$ 的本原扩张). 设 $p \in A$ 是一个非零投影, 则由函数 $t \mapsto \|p(t)\|$ 的连续性, 我们知道 $\|p(t)\| = 1$ $(t \in [0,1])$. 因此, pAp 不可能是一个一维 Banach 空间, 从而 p 不是 "极小投影". 这说明 A 是一个 $\mathfrak{A}_{\mathrm{nfd}}$ 型 C^*- 代数.

(c) 若 $A = c_0$, 则明显不存在 A 的最大的、满足 $\mathscr{P}_{\mathrm{Fd}}$ 的闭理想.

参 考 文 献

[1] Akemann C. A., The General Stone–Weierstrass problem, *J. Funct. Anal.*, 1969, **4**: 277–294.

[2] Akemann C. A., Left ideal structure of C^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, 1970, **6**: 305–317.

[3] Akemann C. A., Eilers S., Regularity of projections revisited, *J. Operator Theory*, 2002, **48**: 515–534.

[4] Akemann C. A., Pedersen G. K., Complications of semicontinuity in C^*-algebra theory, *Duke Math. J.*, 1973, **40**: 785–795.

[5] Brown L. G., Semicontinuity and multipliers of C^*-algebras, *Canad. J. Math.*, 1988, **XL**(4): 865–988.

[6] Cuntz J., Pedersen G. K., Equivalence and traces on C^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, 1979, **33**: 135–164.

[7] Effros E. G., Order ideals in C^*-algebras and its dual, *Duke Math. J.*, 1963, **30**: 391–412.

[8] Elliott G. A., On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras, *J. Alg.*, 1976, **38**: 29–44.

[9] Elliott G. A., On the classification of C^*-algebras of real rank zero, *J. Reine Angew. Math.*, 1993, **443**: 179–219.

[10] Elliott G. A., Toms A. S., Regularity properties in the classification program for separable amenable C^*-algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2008, **45**: 229–245.

[11] Kadison R. V., Ringrose J. R., Fundamentals of the Theoryof Operator Algebras Vol. II: Advanced Theory, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1986, **100**.

[12] Li B., Operator Algebras, Science Press, Beijing, 1986.

[13] Li B., Introductionto Operator Algebras, World Scientific, Singapore, 1992.

[14] Lin H., Equivalent openprojections and corresponding hereditary C*-subalgebras, *J. Lond. Math. Soc.*, 1990, **41**: 295–301.

[15] Murphy G. J., C*-algebras and Operator Theory, Academic Press, San Diego, CA, 1990.

[16] Murray F. J., The Rings of Operators Papers, in The legacy of John von Neumann (Hempstead, NY, 1988), 57–60, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1990: **50**.

[17] Murray F. J., Von Neumann, On rings of operators, *Ann. of Math.*, 1936, **37**(2): 116–229.

[18] Ng C. K., Wong N. C., A Murray–von Neumann Type Classification of C*-algebras, in Operator Semigroups Meet Complex Analysis, Harmonic Analysis and Mathematical Physics, Herrnhut, Germany (in honor of Prof. Charles Battyfor his 60th birthday), Operator Theory: Advance and Applications, Springer Internat. Publ., 2015, **250**: 369–395.

[19] Ng C. K., Wong N. C., Comparisons of equivalence relations on open projections, *J. Operator Theory*, 2015, **74**: 101–123.

[20] Ng C. K., Wong N. C., On the decomposition into discrete, type II and type III C*-algebras, preprint (arXiv:1310.5464v4).

[21] Ortega E., Rørdam M., Thiel H., The Cuntz semigroup and comparison of open projections, *J. Funct. Anal.*, 2011, **260**: 3474–3493.

[22] Pedersen G. K., Applications of weak*-semicontinuity in C*-algebra theory, *Duke Math. J.*, 1972, **39**: 431–450.

[23] Pedersen G. K., C^*-algebras and Their Automorphism Groups, Academic Press, 1979.

[24] Peligrad C., Zsidó L., Open projections of C*-algebras: Comparisonand Regularity, in Operator Theoretical Methods, 17th Int. Conf. onOperator Theory, Timisoara (Romania), June 23–26, 1998, Theta Found. Bucharest, 2000: 285–300.

[25] Prosser R. T., On the ideal structure of operator algebras, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 1963: **45**.

[26] Rørdam M., Classification of nuclear, simple C*-algebras, in Classification of nuclear C*-algebras, Entropy in operator algebras, *Encyclopaedia Math. Sci.*, Springer, Berlin, 2002, **126**: 1–145.

[27] Toms A. S., On the classification problem for nuclear C^*-algebras, *Ann. of Math.*, 2008, **167**(2): 1029–1044.

[28] Zhang S., Stable isomorphism of hereditary C*-subalgebras and stable equivalence of openprojections, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1989, **105**: 677–682.