雙週一題網路數學問題徵答
110 學年度第 2 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第八題：　　111.06.03 公佈，111.06.17 中午 12 點截止

假設方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的根皆爲正實數，試求三根可以構成一個三角形三個角的餘弦值之充分必要條件。　答案：$p^2-2q-2r=1$

解答： 對於任意三角形 ABC，假設 $\angle A$ 的對邊爲 a、$\angle B$ 的對邊爲 b、$\angle C$ 的對邊爲 c 我們有

$$\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}$$

根據 a, b, c 這三個齊次線性方程組，有一個非零的解，我們可以看到

$$\det\begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{vmatrix} = 0$$

也就是

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1 \tag{1}$$

假設這方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0 \tag{2}$$

的根是 $\cos A, \cos B, \cos C$，則由根與係數關係可得

$$\begin{aligned} -p &= \cos A + \cos B + \cos C \\ q &= \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A \\ -r &= \cos A\cos B\cos C \end{aligned}$$

而 第 (1) 式可代換成

$$p^2-2q-2r=1 \tag{3}$$

這就是所需的條件
接著證明第 (3) 式成立且第 (2) 式的三個根 x_1, x_2, x_3 爲正實數。
然後

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2x_3=1 \tag{4}$$

從這邊很清楚的知道每個根皆在 0 與 1 之間，因此存在唯一的銳角 A, B, C 使得 $x_1 = \cos A$, $x_2 = \cos B$, $x_3 = \cos C$。

另外爲了證明 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是一個三角形的三個角，必須去證明出 $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$，在第 (1) 式做代換，我們得到

$$\cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B$$

完成左邊的配方後，我們得到

$$\begin{aligned}
&\cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C + \cos^2 A\cos^2 B = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 A\cos^2 B \\
&\Rightarrow (\cos C + \cos A\cos B)^2 = (1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B) \\
&\Rightarrow (\cos C + \cos A\cos B)^2 = \sin^2 A\sin^2 B
\end{aligned}$$

當所有的角皆爲銳角，取正的方根給

$$\cos C + \cos A\cos B = \sin A\sin B$$

而因此

$$\begin{aligned}
\cos C &= -(\cos A\cos B - \sin A\sin B) \\
&= -\cos(A+B) = \cos(\pi - A - B)
\end{aligned}$$

當 $\angle C$ 和 $\pi - \angle A - \angle B$ 都在 $(0, \pi)$，我們得到需要的 $\angle C = \pi - \angle A - \angle B$。

因此假如第 2 式的根皆爲正實數，那第 (3) 式就是根是一個三角形的餘弦角所必需滿足的條件。 $\square$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨爲「111 年春季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。