

雙週一題網路數學問題徵答

110 學年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
 補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 111.05.20 公佈，111.06.03 中午 12 點截止

當 $0 \leq t \leq 1$ ，滿足條件 $|a + bt + t^2| \leq 1$ 的數對 (a, b) 填滿 (a, b) - 平面的某個區域，求這個區域的面積。 答案： $\frac{23}{6}$

解答：考慮 $f(t) = a + bt + t^2$ ，

這個方程式洽有一個臨界點在 $t = -\frac{b}{2}$ ，臨界值為 $a - \frac{b^2}{4}$ 。

在區間 $[0, 1]$ 上， f 只在端點處和臨界點處才可能有極值。

(若臨界點發生在 $[0, 1]$ 內，即若 $b \in [-2, 0]$)

當 $b \notin [-2, 0]$ 時， f 的極值是 $f(0) = a$ 、 $f(1) = a + b + 1$ ，

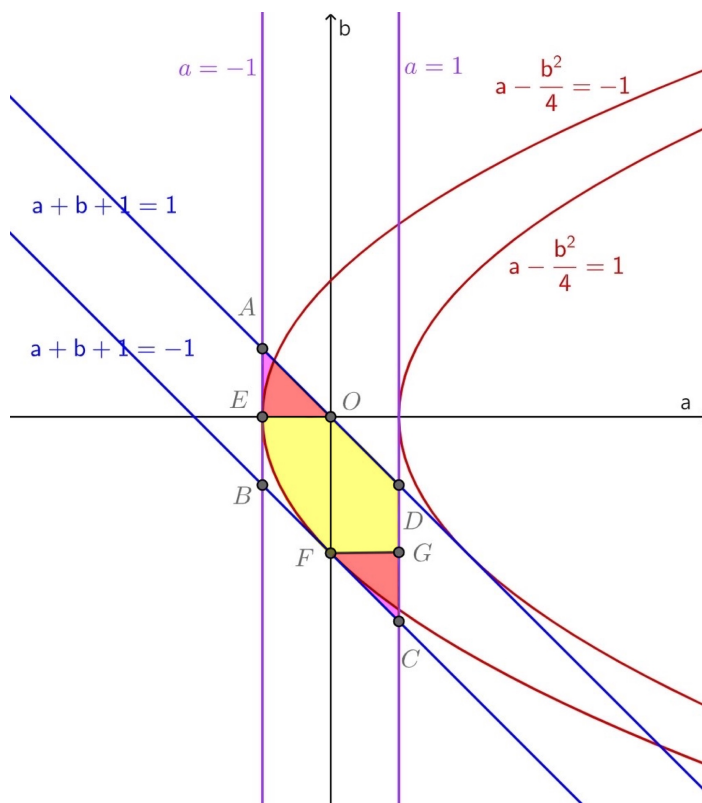
當 $b \in [-2, 0]$ 時，極值集合為 $\{a, a + b + 1, a - \frac{b^2}{4}\}$ ，

因此對所有 $t \in [0, 1]$ 成立， $|f(t)| < 1$ 的充要條件為：

$b \notin [-2, 0]$ 時， $|a| \leq 1$ ， $|a + b + 1| \leq 1$ (圖中粉色加橘色部分： $\triangle AEO$ 及 $\triangle FCG$)

或

$b \in [-2, 0]$ 時， $|a| \leq 1$ ， $|a + b + 1| \leq 1$ ， $|a - \frac{b^2}{4}| \leq 1$ (圖中黃色加橘色部分)，
 如圖表所示：



所求為著色部分，可用平行四邊形 $ABCD$ 減去 EBF 的面積，
而平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 $2 \times 2 = 4$ ，

又 $a = -1$ 、 $b = -2$ 、及拋物線 $a - \frac{b^2}{4} = -1$ 所圍的區域面積為 $\int_0^2 \frac{y^2}{4} dy = \frac{2}{3}$ ，

且 $a = -1$ 、 $b = -2$ 、及 $a + b = -2$ 所圍的區域面積為 $1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ，

所以曲線 EBF 的面積為 $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ，故所求面積 $AEFCD$ 為 $4 - \frac{1}{6} = \frac{23}{6}$ 。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或
傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com
(主旨為「111 年春季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，
請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年
級、班級、學號和 E-mail。