

雙週一題網路數學問題徵答

110 學年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 111.05.06 公佈，111.05.20 中午 12 點截止

有一個底面為三角形的直立稜柱，某一彼此相鄰的三個面(即兩個側面和一個底面)的面積總和為給定值，試求體積的最大值以及何時會達到最大。

解答：讓底三角形的邊 a 和 b 的夾角為 θ ，且邊高為 c 。

如果 L 表是給定的三個面的總和，

則 $L = ac + bc + \frac{1}{2}ab \sin(\theta)$ ，且體積為 $V = \frac{1}{2}abc \sin(\theta)$ 。

令 $x = ac$, $y = bc$, $z = \frac{1}{2}ab \sin(\theta)$ 為三個面的面積之值，

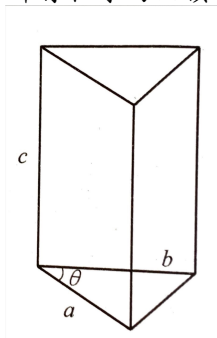
則 $V^2 = \frac{1}{2}xyz \sin \theta$ 其中 x, y, z 是正數，總和為 L 。

由算幾不等式可得 $(xyz)^{1/3} < (x + y + z)/3$ ，

因此

$$V^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{L}{3}\right)^3 \sin \theta \Rightarrow V \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{L}{3}\right)^{3/2}$$

只有在等式成立時 $x = y = z = \frac{1}{3}L$ 且 $\sin \theta = 1$ 時等式成立，
但如果所有的條件都成立時，則三面都有相等的面積和相互垂線。



剩下證明這些條件直立稜柱體能滿足，

對此僅需取 $a = b = 2c = \sqrt{2L/3}$ 且 $\theta = \pi/2$ 。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨為「111 年春季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。