

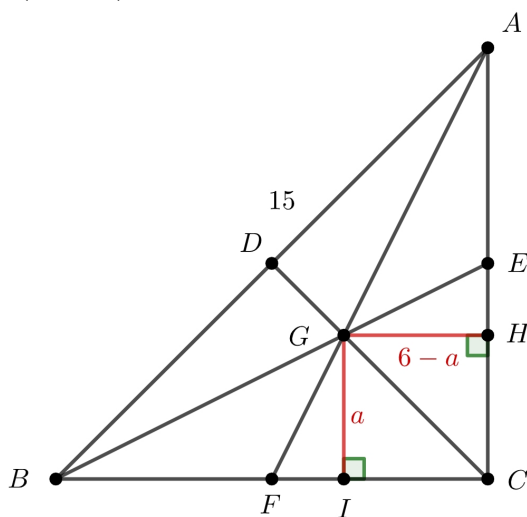
雙週一題網路數學問題徵答 110 學年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第四題： 111.04.08 公佈，111.04.22 中午 12 點截止

$\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， G 為 $\triangle ABC$ 的重心，且 G 到 \overline{BC} 、 \overline{CA} 的距離和為 6。
若 $\overline{AB} = 15$ ，則 $\triangle ABC$ 的內切圓面積為何？ 答案： $\frac{9}{4}\pi$

解答：令 G 點對 \overline{BC} 的垂足為 I 、 G 點對 \overline{AC} 的垂足為 H ，
且令 $d(G, \overline{BC}) = a \Rightarrow d(G, \overline{AC}) = 6 - a$ ，作圖如下：



由畢式定理： $\overline{GC}^2 = a^2 + (6 - a)^2$
 因重心 G 為三中線交點，可知 D 為 \overline{AB} 中點，且 $\angle C = 90^\circ$ ，可知
 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心為 D ；半徑 $= \overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} = \frac{15}{2}$ ；
 而、 G 為重心， $\overline{GC} = \frac{2}{3} \times \overline{CD} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \overline{AB} = \frac{1}{3} \times 15 = 5$
 $\Rightarrow 5^2 = a^2 + (6 - a)^2 \Rightarrow a = \frac{6 + \sqrt{14}}{2}$
 因 $\overline{GH} \parallel \overline{FC}$ ，又 $\overline{AG} : \overline{AF} = 2 : 3$
 $\Rightarrow \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{FC}} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{6 - a}{\overline{FC}} \Rightarrow \overline{FC} = \frac{3}{2}(6 - a)$
 $\Rightarrow \overline{BC} = 2\overline{FC} = 3(6 - a) = 3 \times \frac{6 - \sqrt{14}}{2} = \frac{18 - 3\sqrt{14}}{2}$
 同理， $\frac{\overline{BG}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{GI}}{\overline{EC}} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{a}{\overline{EC}} \Rightarrow \overline{EC} = \frac{3a}{2}$
 $\Rightarrow \overline{AC} = 2\overline{EC} = 3a = 3 \times \frac{6 + \sqrt{14}}{2} = \frac{18 + 3\sqrt{14}}{2}$
 利用面積公式： $\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC} = rs$ (s 為半周長)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{18 - 3\sqrt{14}}{2} \times \frac{18 + 3\sqrt{14}}{2} = \frac{33r}{2} \Rightarrow 33r = \frac{99}{2} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

故內切圓面積 $r^2\pi = \frac{9}{4}\pi$ 。

□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨為「111 年春季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。