雙週一題網路數學問題徵答
110 學年度第 2 學期

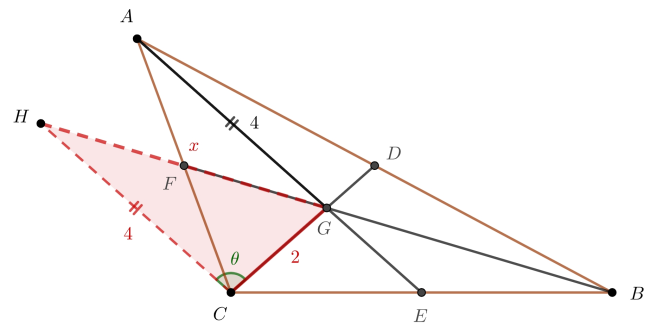
主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 111.03.25 公佈，111.04.08 中午 12 點截止

已知 $\triangle ABC$ 的面積爲 $3\sqrt{15}$，其中兩條中線的長度分別爲 3、6，求第三條中線的長度最大值爲何？

答案：$3\sqrt{6}$

解答： 令 D、E、F 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的中點，三中線爲 $\overline{CD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BF}$，
令 $\overline{AE}=6$、$\overline{CD}=3$，且令 G 爲 $\triangle ABC$ 的重心(重心爲三中線交點)，
延長 $\overline{BF}$，在 $\overrightarrow{BF}$ 上取一點 H，使得 $\overline{HF}=\overline{FG}$，
因 $\overline{HF}=\overline{FG}$、$\overline{AF}=\overline{FC}$($F$ 爲 $\overline{AC}$ 中點)、$\angle AFG=\angle HFC$ (對頂角相等)，
可知 $\triangle AFG \simeq \triangle CFH$，
又 $\angle AGF=\angle CHF$ (內錯角相等) $\Rightarrow \overline{HC}//\overline{AG}$，作圖如下：



設 $\overline{HG}=x$、$\angle HCG=\theta$，
因重心性質可知 $\overline{HC}=\overline{AG}=6\times\frac{2}{3}=4$，$\overline{CG}=3\times\frac{2}{3}=2$，
又 $\triangle CGH=\triangle CGA=\frac{1}{3}\triangle ABC=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{15}=\sqrt{15}$，
$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 2\times 4\times\sin\theta=\sqrt{15}\Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{1}{4}$
在 $\triangle HCG$ 中，由餘弦定理：
$\Rightarrow x=\sqrt{2^2+4^2-2\times 4\times 2\times\left(\pm\frac{1}{4}\right)}=2\sqrt{6}$ 或 4
$\Rightarrow \overline{BF}$ 的最大值爲 $2\sqrt{6}\times\dfrac{3}{2}=3\sqrt{6}$。 $\square$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨爲「111 年春季第 X 題解答」) 。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。