

雙週一題網路數學問題徵答 110 學年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

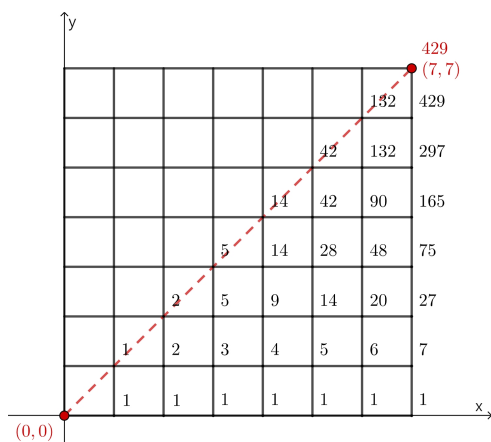
第二題： 111.03.11 公佈，111.03.25 中午 12 點截止

如下圖，將數字 1 ~ 14 填入一個 2×7 的表格中，其中左邊的數字要比右邊的數字小，上面的數字要比下面的數字小，滿足這種規律的填法有幾種？ 答案：429

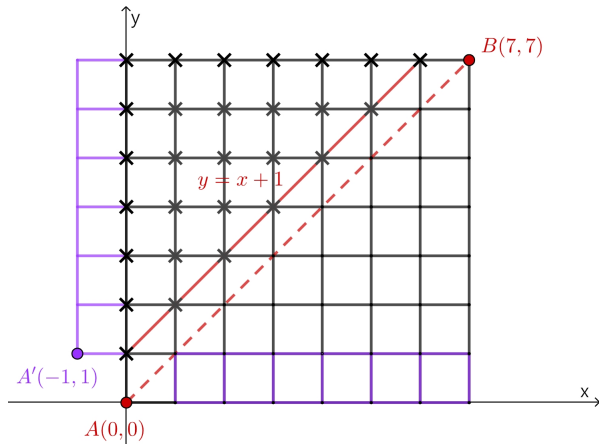
解答：可將題意視為坐標平面上，從點 $(0,0)$ 到點 $(7,7)$ 走捷徑，且必須滿足 $x \geq y$ 的方法數，如此一來可滿足向右走 7 步、向上也走 7 步，可剛好填入 14 個格子，而每走一步填的數字就 +1，若向右走則填在上排，若向上走則填在下排，算法如下：

(算法一)：

用下圖走捷徑加法計算可得 429 方法。 □



(算法二)：



利用卡塔藍數(Catalan number)，又稱一路領先(含等於)公式：

先考慮全部的走法，再扣除掉有在違規線內(打叉點)的單調路徑。

從 $A = (0, 0)$ 點走到 $B = (7, 7)$ 點的方法數 $= C_7^{14}$ ；

接著將原來的出發點 A 以違規線 $(y = x + 1)$ 為對稱軸做對稱點 $A' = (-1, 1)$ ，

因由 A' 走到 B 的所有路徑會與 A 走到 B 點的所有違規路徑成一一对應，

且從 A' 點走到 B 點的方法數 $= C_8^{14}$ ，

故所求為 $C_7^{14} - C_8^{14} = 3432 - 3003 = 429$ 。 □

註：

不躍過對角線的正方形格子單調路徑之卡塔蘭數公式為 $C_n^{2n} - C_{n+1}^{2n} = \frac{1}{n+1} \cdot C_n^{2n}$ 。

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨為「111年春季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。