雙週一題網路數學問題徵答
110 學年度第 2 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

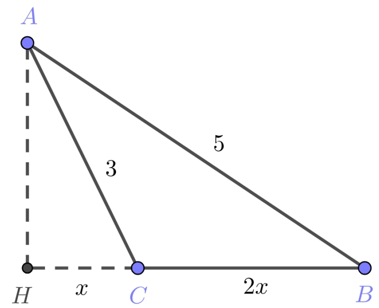
第一題：　　111.02.25 公佈，111.03.11 中午 12 點截止

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=3$，過 A 點作直線 $\overline{BC}$ 的垂直線，設垂足爲 H，若 $\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$，求 $\triangle ABC$ 的外接圓面積爲何？　答案：$\frac{225}{28}\pi$

解答：由 $\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow 2\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}$

從上式可知，C 點在 B、H 點之間，且 $\overline{CH}:\overline{CB}=1:2$，

設 $\overline{CH}=x$，$\overline{CB}=2x$，作圖如下：



由畢氏定理，$3^2-x^2=5^2-(3x)^2\Rightarrow 8x^2=16\Rightarrow x=\sqrt{2}$ (因邊長爲正)

由餘弦定理，$\cos\angle ACB=\dfrac{3^2+(2\sqrt{2})^2-5^2}{2\times3\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$；

設 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑爲 R，

由正弦定理，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB}=2R\Rightarrow R=\dfrac{5}{2\times\frac{\sqrt{7}}{3}}=\dfrac{15}{2\sqrt{7}}$；

故 $\triangle ABC$ 的外接圓面積爲 $R^2\pi=\dfrac{225}{28}\pi$。　□

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨爲「111 年春季第 X 題解答」) 。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。