雙週一題網路數學問題徵答
111 學年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 111.12.23 公佈，112.01.06 中午 12 點截止

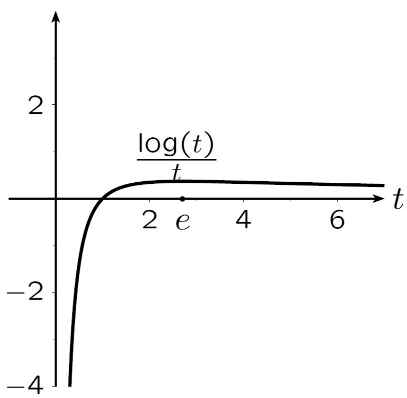
方程式 $x^y = y^x$ 在第一象限（換句話說，就是 $x > 0$ 及 $y > 0$ 的部分）的圖形是由直線及曲線所構成，試求出直線與曲線的交點座標。

解答： 此方程式在第一象限裡等價於

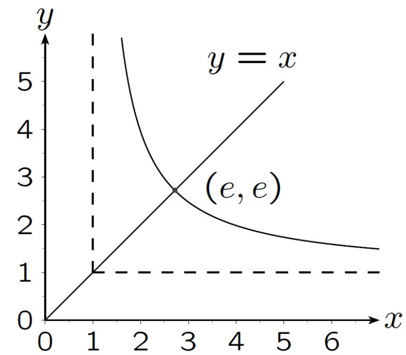
$$\frac{1}{y}\log y = \frac{1}{x}\log x$$

考慮函數

$$f(t) = \frac{1}{t}\log t, \quad t > 0$$



因爲 $f'(t) = \dfrac{(1-\log t)}{t^2}$，我們可以明確的知道，它在 $t \leq e$ 爲嚴格遞增，
而在 $t \geq e$ 爲嚴格遞減，且在 $t = e$ 時有極大值 e^{-1}。
此外，當 $t \to 0$ 時 $f(t) \to -\infty$，當 $t \to \infty$ 時 $f(t) \to 0$，
由此判斷方程式 $f(t) = \alpha$ 其中 $\alpha \in (0, e^{-1})$ 時有兩個解，
一個解位在 $(1, e)$，而另一個位在 (e, ∞)。
而當 t 趨近於 0 時，第一個解會趨近於 1，而另一個解會趨近於 ∞。
當 α 趨近於 e^{-1} 時，此兩解會逼近於同一數值爲 e。因此如圖所示，
方程式軌跡由直線 $y = x$，及曲線 M 所構成落在第一象限上且
$x = 1$ 及 $y = 1$ 爲兩漸近線。M 很明顯的對稱於方程式 $y = x$ 且相交於 (e, e)。



我們可以確切的分析此平滑曲線 M。
如果 F 爲一定義在 $\mathbb{R}^2$ 開區間上之平滑函數 $(f \in C^\infty)$，那麼 F 的等高線爲一平滑曲線，除了 F 可能的臨界點外 (臨界點就是 F 在兩方向之篇導數等於 0 的點) 。
假如二次泰勒多項式爲一非退化之二次形式，
在臨界點的等高線結構就如同 F 的二次泰勒多項式的等高線結構。

設

$$F = \frac{1}{y}\log y - \frac{1}{x}\log x, \quad x > 0, y > 0$$

然而

$$F_x = \frac{-1}{x^2}(1 - \log x), \quad F_y = \frac{1}{y^2}(1 - \log y)$$

而且 F 只有一個臨界點在 (e, e)。F 在這點的二次泰勒多項式爲

$$\frac{1}{2e^3}\left((x-e)^2 - (y-e)^2\right)$$

這爲一非退化之二次形式，再沿著斜率線 $+1$ 及 -1 通過點 (e, e)。
由此判斷除了落在兩平滑曲線斜率爲 $+1$ 及 -1 的交點 (e, e) 外，F 爲平滑曲線。
當此軌跡爲等高線時，這證明了上面所描述的曲線 M 爲一平滑曲線。 □

【註】 The problem as discussed at length by E. J. Moulton. in "The Real Function Defined by $x^y = y^x$. American Mathematical Monthly. vol. 23 (1916). pages 233-237. R. Robinson Rowe (Journal of Recreational Mathematics. vol. 3 (1970). pages 176-178) calls the curve M the "mutuabola."

For a discussion of level sets, see R. C. Buck, Advanced Calculus. McGraw-Hill. New. York. 1965, page 349 ff. □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com (主旨爲「111 年秋季第 X 題解答」) 。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。