雙週一題網路數學問題徵答
111 學年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 111.12.09 公佈，111.12.23 中午 12 點截止

給定 $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$, $n \geq 1$，若 $b_n = \alpha(n) \cdot b_{n-1} + \beta,\ n \geq 2$，試求 $\alpha(n)$ 及 β，以及 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 的值。

解答： (1)

我們有 $n!b_n = \sum_{k=0}^{n} k!(n-k)! = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)!(n-k+1)!$

所以

$$\begin{aligned} 2n!b_n &= 0!n! + \sum_{k=1}^{n}[k!(n-k)! + (k-1)!(n-k+1)!] + n!0! \\ &= 2n! + (n+1)\sum_{k=1}^{n}(k-1)!(n-k)! \\ &= 2n! + (n+1)[(n-1)!b_{n-1}] \end{aligned}$$

同除 $2n!$，我們得到 $b_n = 1 + \frac{n+1}{2n} b_{n-1}$，故 $\alpha(n) = \frac{n+1}{2n}$，$\beta = 1$。

(2)

令 $b_n = 2 + C_n$，則 $nC_n = 1 + \frac{n+1}{2(n-1)}(n-1)C_{n-1}$，

我們應該由歸納法證明對所有的 n，$nC_n \leq 6$，

這對於 $n = 1,\ 2,\ 3$ 明顯成立，因 $C_1 = 0$，$C_2 = \frac{1}{2}$，$C_3 = \frac{2}{3}$。

設 $n = k-1$ 成立，當 $k \geq 4$，則 $kC_k \leq 1 + \frac{k+1}{2(k-1)} \times 6 \leq 1 + \frac{5}{2\cdot 3} \times 6 = 6$

成立的理由是 $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \leq 1 + \frac{2}{3}$，其中 $k \geq 4$。這完成了歸納法。

從這不等式 $C_n \leq \frac{n}{6}$ 和明顯的事實 $C_n \geq 0$，得到 $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$，故 $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$。

□

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com (主旨為「111 年秋季第 X 題解答」) 。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。