

雙週一題網路數學問題徵答
111 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 111.11.25 公佈，111.12.09 中午 12 點截止

設 $f(x)$ 為實數係數的多項式使得 $f(0) = 1$, $f(2) + f(3) = 125$ 並且對於所有 x , $f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x)$, 試求 $f(5)$ 。 答案：676

解答：(法一)

若 $f(x)$ 的最高次項為 ax^m ,

則 $f(x)f(2x^2)$ 的最高次項為 $= ax^m \cdot a(2x^2)^m = 2^m a^2 x^{3m}$,

且 $f(2x^3 + x)$ 的最高次項為 $= 2^m a x^{3m}$, 因此可得 $2^m a^2 = 2^m a$ 以及 $a = 1$ 。

而因為 $f(0) = 1$, 故 $f(x)$ 所有根的乘積為 ± 1 。

若 $f(\lambda) = 0$, 則 $f(2\lambda^3 + \lambda) = 0$ 。

假設存在一個根 λ , 則必定存在一個根 λ_1 , 其中 $|\lambda_1| > 1$ 。

故 $|2\lambda^3 + \lambda| \geq 2|\lambda|^3 - |\lambda| > 2|\lambda| - |\lambda| = |\lambda|$ 。

然而, 由 $\lambda_{k+1} = 2\lambda_k^3 + \lambda_k$, 對 $k \geq 1$, 可知 $f(x)$ 會有無限多個根。

因此, 對於多項式的所有根, $|\lambda| = 1$, 故 $\lambda\bar{\lambda} = 1$, 且 $(2\lambda^3 + \lambda)\overline{(2\lambda^3 + \lambda)} = 1$ 。

對 $\lambda = a + bi$ 同時求解這些方程得到 $a = 0, b^2 = 1$, 因此 $\lambda^2 = -1$ 。

因為多項式有實數係數, 所以對於某個整數 $n \geq 1$,

多項式必須具有 $f(x) = (1 + x^2)^n$ 的形式。

條件 $f(2) + f(3) = 125$ 意味著 $n = 2$, 得到 $f(5) = 676$ 。

(法二)

令 r 為 $f(x)$ 的一根, 然而我們得知 $f(r)f(2r^2) = f(2r^3 + r)$;

由於 r 為一根, 我們得到 $f(r) = 0$; 所以 $2r^3 + r$ 也為一根。

因此, 假設 r 為非零的實數, $f(x)$ 有無限多根。

由於 $f(x)$ 為一多項式(只有有限個根)且 $f(0)$ 為非零, 則 $f(x)$ 沒有實根。

然而我們先從最簡單的兩個複數根代進式子: $r = \pm i$ 。

我們發現 $f(i)f(-2) = f(-i)$ 而且 $f(-i)f(-2) = f(i)$ 。

此亦即 $f(i)f(-i)f^2(-2) = f(i)f(-i) \implies f(i)f(-i)(f^2(-2) - 1) = 0$ 。

所以 $\pm i$ 為多項式的根, 所以 $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ 將為此多項式的因式。

因此, 多項式變成 $f(x) = (x^2 + 1)g(x)$ 。代入此給定的表示式, 得到

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)g(x)(4x^4 + 1)g(2x^2) &= [(2x^3 + x)^2 + 1]g(2x^3 + x) \\ \implies (4x^6 + 4x^4 + x^2 + 1)g(x)g(2x^2) &= (4x^6 + 4x^4 + x^2 + 1)g(2x^3 + x) \end{aligned}$$

對於所有 x 使得 $4x^6 + 4x^4 + x^2 + 1 = (4x^4 + 1)(x^2 + 1)$ 為 0 或

$g(x)$ 滿足 $f(x)$ 相同限制。對於部分 n , 使得 $f(x) = (x^2 + 1)^n$ 。

由於對部分 n , 使得 $f(2) + f(3) = 125 = 5^n + 10^n$,

我們得到 $n = 2$; 故 $f(5) = 676$ 。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com (主旨為「111 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。