

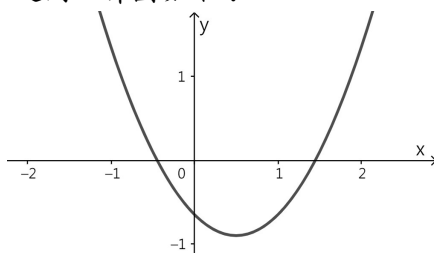
雙週一題網路數學問題徵答 111 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 111.11.11 公佈，111.11.25 中午 12 點截止

設實係數二次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ 有兩實根 α, β 滿足 $-1 \leq \alpha \leq 0, 1 \leq \beta \leq 2$ ，
則 $a^2 + b^2$ 的最小值為何？ 答案： $\frac{1}{2}$

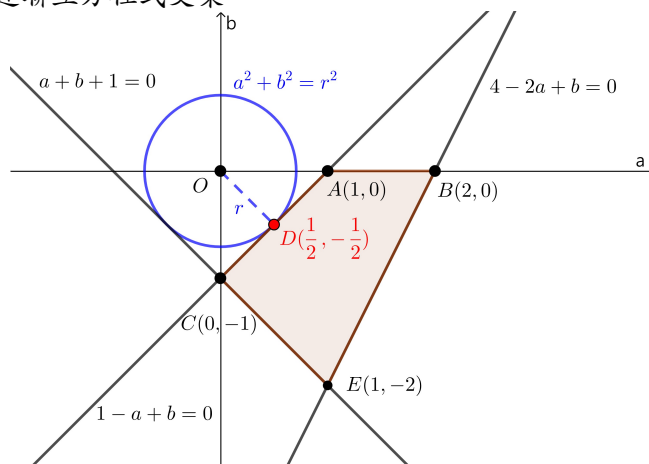
解答：由題意可知 $y = f(x) = x^2 - ax + b$ 為向上凹的拋物線，
且兩根介於 $[-1, 0]$ 及 $[1, 2]$ 之間，作圖如下：



將兩個左右臨界點代入 $f(x)$ ，並觀察圖形可得：

$$\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(0) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \\ f(2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + b \geq 0 \\ b \leq 0 \\ 1 - a - b \leq 0 \\ 4 - 2a + b \geq 0 \end{cases}$$

下圖著色區域為上述聯立方程式交集，



而 $a^2 + b^2 = r^2$ 為以原點為圓心的圓，其半徑的最小值即為 $\overline{OD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，

因此 $a^2 + b^2$ 的最小值為 $r^2 = \frac{1}{2}$ 。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或
傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com

(主旨為「111 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。