

雙週一題網路數學問題徵答 111 學年度第 1 學期

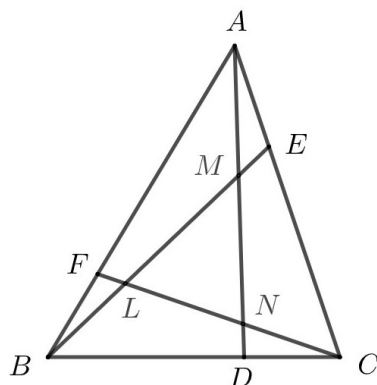
主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 111.10.14 公佈，111.10.28 中午 12 點截止

設 D 、 E 、 F 分別在 $\triangle ABC$ 的 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 邊上，滿足 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \lambda$ 。又 \overrightarrow{AD} 、 \overrightarrow{BE} 、 \overrightarrow{CF} 圍出 $\triangle LMN$ ，求兩三角形的面積比 $\frac{\triangle LMN}{\triangle ABC}$ 為何？ 答

案： $\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda^2 + \lambda + 1}$

解答： 畫示意圖如下：



$$\begin{aligned}
 & \text{由孟氏定理：} \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \times \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = 1 \\
 & \Rightarrow \lambda \times \frac{\lambda + 1}{1} \times \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{DN}} = \lambda(\lambda + 1) \Rightarrow \frac{\overline{AN}}{\overline{AD}} = \frac{\lambda^2 + \lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1} \\
 & \Rightarrow \triangle ANC \text{ 面積} = \frac{\lambda^2 + \lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1} \triangle ACD \text{ 面積} \\
 & = \frac{\lambda^2 + \lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1} \times \frac{1}{\lambda + 1} \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1} \triangle ABC \text{ 面積，同理，} \\
 & \triangle ABM \text{ 面積} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1} \triangle ABC \text{ 面積，} \\
 & \triangle BCL \text{ 面積} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1} \triangle ABC \text{ 面積，} \\
 & \text{故所求} = 1 - 3 \times \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1} = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda^2 + \lambda + 1}。 \quad \square
 \end{aligned}$$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com (主旨為「111 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。