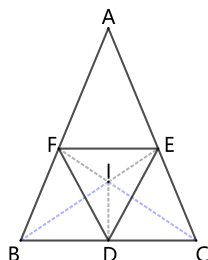


雙週一題網路數學問題徵答 111 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第二題： 111.09.30 公佈，111.10.14 中午 12 點截止

如下圖， I 為等腰三角形 ABC 的內心 ($\overline{AB} = \overline{AC}$)， $\overline{ID} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{IE} \perp \overline{AC}$ 、 $\overline{IF} \perp \overline{AB}$ 。若 $\triangle AFE$ 的面積等於 $\triangle FBD$ 與 $\triangle EDC$ 的面積和，求 $\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = ?$ 答案： $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



解答：連 \overline{IB} 、 \overline{IC} ，設 $\overline{AF} = a$ ， $\overline{BF} = 1$ ， $\angle A = 2\theta$ ，
 因 I 為等腰三角形 ABC 的內心， $\Rightarrow \overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$
 $\Rightarrow \overline{BF} = \overline{BD} = 1$ ， $\overline{CD} = \overline{CE}$ ， $\angle IB D = \angle IC D$ ， $\angle B = \frac{1}{2}(\pi - 2\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$
 $\Rightarrow \triangle IB D \cong \triangle IC D \Rightarrow \overline{BD} = \overline{CD} = 1$
 又因 $\overline{BF} = \overline{BD} = \overline{CD} = \overline{CE}$ ， $\angle B = \angle C$
 $\Rightarrow \triangle BDF \cong \triangle CDE \Rightarrow \triangle BDF$ 與 $\triangle CDE$ 面積相等
 而 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BF} = \overline{CE} \Rightarrow \overline{AF} = \overline{AE} = a$
 另外， \overline{AI} 為 $\angle A$ 的角平分線 $\Rightarrow \overline{AI}$ 的延長線垂直於 \overline{BC}
 且 $\overline{ID} \perp \overline{BC} \Rightarrow A、I、D$ 三點共線 $\Rightarrow \sin \theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{a+1}$
 因 $\triangle AFE$ 的面積等於 $\triangle FBD$ 與 $\triangle EDC$ 的面積和，
 且 $\triangle FBD$ 與 $\triangle EDC$ 面積相等，故

$$\frac{1}{2}\overline{AF} \cdot \overline{AE} \sin A = \frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{BF} \sin B + \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{CE} \sin C = \overline{BD} \cdot \overline{BF} \sin B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a \cdot a \sin 2\theta = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \Rightarrow a^2 \sin \theta \cos \theta = \cos \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a+1}$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}。 \quad \square$$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2022@gmail.com (主旨為「111 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。