

雙週一題網路數學問題徵答  
109 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系  
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第八題: 110.06.11 公佈, 110.06.25 中午 12 點截止

令  $A, B$  分別為  $3 \times 2, 2 \times 3$  矩陣, 若  $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,

證明  $BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ 。

解答: 因為  $AB$  可對角化且特徵值為 9, 9, 0, 其對應之特徵向量為  $(-2, 0, 1), (2, 1, 0), (1, -2, 2)$ , 所以得  $(AB)^2 = 9AB$ , 且  $AB$  的  $\text{rank} = 2$ 。因為  $(AB)^2 = 9AB$  所以  $BA$  的  $\text{rank}$  大於等於  $A(BA)B = 9AB$  的  $\text{rank} = 2$ , 且  $BA$  為  $2 \times 2$  矩陣故  $BA$  的  $\text{rank}$  小於等於 2, 所以  $BA$  的  $\text{rank}$  等於 2, 故為可逆矩陣。考慮  $(BA)^3 = B(AB)^2A = B(9AB)A = 9(BA)^2$ , 因  $BA$  為可逆矩陣, 所以  $BA = 9I$ 。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱, 或傳真 07-5253809, 或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem.2019@gmail.com](mailto:nsysu.problem.2019@gmail.com) (主旨為「109 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。