雙週一題網路數學問題徵答
109 年度第 2 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第七題：　　110.05.28 公佈，110.06.11 中午 12 點截止

對所有正整數 n，令 $A_n = (1+\frac{1}{n})^n,\ B_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1},\ C_n = \frac{2A_nB_n}{A_n+B_n}$，
證明 $C_1 < C_2 < \cdots < C_n < \cdots$。

解答： 可知 $C_n = 2(n+1)^{n+1}n^{-n}(2n+1)^{-1}$。
令 $g(x) = \ln 2 + (x+1)\ln(x+1) - x\ln x - \ln(2x+1)$，
則可知 $g'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{2}{2x+1}$，
以及 $g''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{4}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}$。
又對所有 $0 < x < \infty,\ g''(x) < 0$，因此可知 $g'(x)$ 在 x 大於 0 時爲遞減，且

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty} \log\frac{x+1}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x+1} = 0$$

故可知 $g'(x)$ 在 x 大於 0 時恆正，因此可得 $g(x)$ 在 x 大於 0 時遞增，又 $C_n = e^{g(x)}$，故 C_n 在 x 大於 0 時也爲遞增。 $\square$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨爲「109 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。