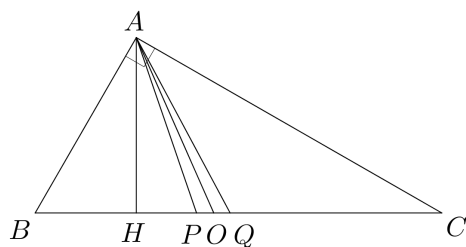


雙週一題網路數學問題徵答 109 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 110.04.30 公佈，110.05.14 中午 12 點截止

如圖，已知一個直角三角形 $\triangle ABC$ ， \overline{BC} 為斜邊，斜邊長為 a ，斜邊上的高為 h ， O 為斜邊上的中點，今將斜邊 n ($n > 1$, n 為奇數) 等分，若 P, Q 為其中兩個等分點，且 $\overline{PQ} = \frac{a}{n}$ ， O 點介於 P, Q 之間，設 $\angle PAQ = \alpha$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \alpha$ 。 答案： $\frac{4h}{a}$



解答：注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = 1$ 。而由正弦定理有 $\sin \alpha = \frac{a}{2nR_n}$ ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{2R_n}$ 。
其中 R_n 為 APQ 之外接圓半徑。再由正弦定理可得 $R_n = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \overline{PQ}}{4 \cdot \Delta_{APQ}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \frac{a}{n}}{2ah} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \frac{a}{n}}{2ah} = \frac{\overline{AO}^2}{2h} = \frac{(\frac{a}{2})^2}{2h} = \frac{a^2}{8h}$ 。故所求為 $\frac{4h}{a}$ 。 \square

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨為「109 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。