雙週一題網路數學問題徵答
110 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 110.12.03 公佈，110.12.17 中午 12 點截止

在行列式井字遊戲上，玩家 1 先把一個 1 輸入至3×3 的矩陣空格內。玩家 0 接著把 0 輸入至空的位置，一直輪流直到這個 3×3 的矩陣填滿了五個 1 和四個 0 爲止。如果這個矩陣的行列式是 0 則玩家 0 獲勝，反之則玩家 1 獲勝。假設兩個玩家都進行最理想的策略，那麼誰將會勝利？爲什麼？ 答案：玩家 0

解答： 玩家 0 以最理想的玩法獲勝。事實上，我們證明玩家 1 不能夠阻止玩家 0 創造一列、一行或一個 2×2 的子矩陣都是零。任意一種情況都會使得這個矩陣的行列式變成零。

對 $i, j = 1, 2, 3$, 令 A_{ij} 被記爲第 i 列第 j 行的位置。在不失一般性的情況下，我們可以假設玩家 1 的第一步下在 A_{11}。玩家 0 則下在A_{22} ：

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

在玩家 1 的第二步之後，A_{23} 和 A_{32} 之中至少保持一個是空的。在不失一般性的情況下，假設 A_{23} 保持空的；玩家 0 則下在那。

在玩家 1 的第三步之後,如果 A_{21} 的位置是空的，玩家 0 下在那裡就贏了。所以假設玩家 1 已經下在那裡了。如此到玩家 1 的第三步爲止，其中兩步下在 A_{11} 和 A_{21}。因此對 i 等於 1 或 3，對 j 等於 2 或 3，下列兩者爲眞：

(a) 這個 2×2 的子矩陣爲原矩陣的第 2 列和第 i 列以及第 2 行和第 3 行，包含兩個零和兩個空的位置。

(b) 第 j 行包含一個零和兩個空的位置。

玩家 0 的下一步下在 A_{ij}。爲了避免整行都是零，玩家 1 必須下在第 j 行，接著玩家 0 爲了勝利完成了(a) 2×2 的子矩陣。

註記：也可以藉由做一個可能的遊戲序列的樹狀圖直接地解決這個問題。這一個樹狀圖可以使用對稱的方式：這個對稱在行與列之間，這個結果在行與列的對調下的不變性，而且事實上動作後的情況不取決於這項動作的次序(有時稱爲「對調不變性」)。

註記：一個可以讓行列式井字遊戲變成一般井字遊戲的變形的方式。換句話說，考慮依下列各項分類的井字遊戲格子：

A_{11}	A_{22}	A_{33}
A_{23}	A_{31}	A_{12}
A_{32}	A_{13}	A_{21}

然後任意一項在行列式的行或列的格子中擴充。假設玩家 1 的第一步下在左上角。玩家 0 藉由第一步下在最上面一列獲勝，接著第二步下在最左邊一行。然後只有在左邊的行和列給予玩家 1 威脅，而且玩家 1 的第三步都已經無法對兩者產生威脅，因此玩家 0 有時間妨礙兩者。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨爲「110 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。