# 雙週一題網路數學問題徵答
# 110 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 110.12.03 公佈，110.12.17 中午 12 點截止

試求函數 $f(x)$，對任意實數 $x$，$|x| \neq 1$，滿足 $f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\dfrac{3+x}{1-x}\right)=x$。

答案：$f(x)=\dfrac{x^3+7x}{2-2x^2}$

解答： 將 $\dfrac{x-3}{x+1}$ 代入方程式的 $x$：

$$f\left(\frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1}\right)+f\left(\frac{3+\frac{x-3}{x+1}}{1-\frac{x-3}{x+1}}\right)=\frac{x-3}{x+1}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-2x-6}{2x-2}\right)+f\left(\frac{4x}{4}\right)=\frac{x-3}{x+1}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x+3}{1-x}\right)+f(x)=\frac{x-3}{x+1}\quad\cdots(1)$$

將 $\dfrac{3+x}{1-x}$ 代入方程式的 $x$：

$$f\left(\frac{\frac{3+x}{1-x}-3}{\frac{3+x}{1-x}+1}\right)+f\left(\frac{3+\frac{3+x}{1-x}}{1-\frac{3+x}{1-x}}\right)=\frac{3+x}{1-x}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{4x}{4}\right)+f\left(\frac{6-2x}{-2-2x}\right)=\frac{3+x}{1-x}$$

$$\Rightarrow f(x)+f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)=\frac{3+x}{1-x}\quad\cdots(2)$$

將第 (1) 式及第 (2)式相加：

$$f\left(\frac{x+3}{1-x}\right)+f(x)+f(x)+f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)=\frac{x-3}{x+1}+\frac{3+x}{1-x}$$

化簡之後可得 $f(x)=\dfrac{x^3+7x}{-2x^2+2}$。

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨爲「110 年秋季第 $X$ 題解答」)。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。