雙週一題網路數學問題徵答
108 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 109.05.22 公佈，109.06.05 中午 12 點截止

設 $r>0$, $G(r)$ 是 $|r-\sqrt{m^2+2n^2}|$ 對所有整數 m,n 的最小值，試求：$\lim_{r\to\infty} G(r)$。
答案：0

解答： 首先將 $|r-\sqrt{m^2+2n^2}|$ 有理化並找出它的上下界，

$$0\le |r-\sqrt{m^2+2n^2}| = \frac{|r^2-m^2-2n^2|}{r+\sqrt{m^2+2n^2}} \le \frac{|r^2-m^2-2n^2|}{r}$$

選取最大整數 $m\ge 0$ 使得 $r^2-m^2\ge 0$。那麼 $m^2\le r^2<(m+1)^2$，所以 $m\le r$ 且 $r^2-m^2<2m+1$。接下來選取最大整數 $n\ge 0$ 使得 $r^2-m^2-2n^2\ge 0$。那麼 $2n^2\le r^2-m^2<2(n+1)^2$，這會得到 $n\le\sqrt{(r^2-m^2)/2}$ 且

$$\begin{aligned}|r^2-m^2-2n^2| &= r^2-m^2-2n^2\\ &< 2(2n+1)\\ &\le 2+4\sqrt{(r^2-m^2)/2}\\ &\le 2+\sqrt{2m+1}\\ &\le 2+\sqrt{2r+1}\end{aligned}$$

因此 $G(r)\le (2+\sqrt{2r+1})/r$ 且 $\lim_{r\to\infty} G(r)=0$。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨爲「109 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。