

# 雙週一題網路數學問題徵答 109 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系  
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 109.12.25 公佈，110.01.08 中午 12 點截止

令  $A_1, A_2, \dots, A_{1066}$  是有限集合  $X$  的子集合，使得對  $1 \leq i \leq 1066$ ， $|A_i| > \frac{1}{2}|X|$ 。證明存在  $T \subseteq X$ ， $|T| \leq 10$ ，使得每個  $A_i$ ， $T \cap A_i \neq \phi$ 。

解答：  $|X| \leq 10$  對此敘述無意義，故直接考慮  $|X| \geq 10$ ，同時考慮  $A_i$  彼此都不同，令  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  以及令  $x_i$  在  $A_1, A_2, \dots, A_{1066}$  中出現在  $n_i$  個集合中，此時可得

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_{1066}| \geq \frac{m}{2} \times 1066 = 533m$$

代表其中至少存在一個  $n_i \geq 533$  令其對應的  $x_i = a_1$ ，即至少有 533 個集合包含  $a_1$ ，同時也代表最多只有  $1066 - 533 = 533$  個集合沒包含  $a_1$ 。

之後就這最多只有 533 個沒包含  $a_1$  的集合重複上述動作可得至少存在一個  $n_t > 266$  令其對應的  $x_i = a_2$ ，即至少有 267 個集合包含  $a_1$ ，同時也代表最多只有  $533 - 267 = 266$  個集合沒包含  $a_2$ 。

繼續重複以上動作可發現最多只有 133 個集合沒包含  $a_3, \dots$ ，最多只有 2 個集合沒包含  $a_9$

由於剩餘兩個集合其元素個數均多於  $X$  的一半，故兩集合必有交集，從交集中選出  $a_{10}$  即可。

令  $\{a_1, \dots, a_{10}\} = T$  即為所求

以上步驟均以極值狀況討論，因為假設第二步實際只有兩個集合沒包含  $a_1$  那就證明完畢了，故最多就是十步。  $\square$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem.2019@gmail.com](mailto:nsysu.problem.2019@gmail.com) (主旨為「109 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。