雙週一題網路數學問題徵答
109 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 109.12.11 公佈，109.12.25 中午 12 點截止

已知集合 $A,\ B$ 都是由正整數組成的集合，且 $|A|=18,\ |B|=14$。集合 A 滿足以下條件：若 $a,\ b,\ m,\ n\in A$，且 $a+b=m+n$，則必有 $\{a,\ b\}=\{m,\ n\}$，定義 $A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$，求 $|A+B|$ 的最小值。 答案：161

解答： 令

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{18}\}$$

$$B=\{b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_{14}\}$$

$$C_j=\{a_i+b_j\mid i=1,\ 2,\ \dots,\ 18\},\quad j=1,\ 2,\ \dots,\ 14$$

可得

$$A+B=\bigcup_{j=1}^{14}C_j$$

假設 $C_m,\ C_n\ (m\neq n)$ 且 $|C_m\cap C_n|\geq 2$，則存在 $t_1,\ t_2,\ s_1,\ s_2$，使得

$$a_{t_1}+b_m,\quad a_{s_1}+b_m,\quad a_{t_2}+b_n,\quad a_{s_2}+b_n\in C_m\cap C_n$$

且

$$a_{t_1}+b_m=a_{t_2}+b_n,\quad a_{s_1}+b_m=a_{s_2}+b_n$$

$$a_{t_1}\neq a_{t_2},\quad a_{s_1}\neq a_{s_2}$$

則可得

$$a_{t_1}-a_{t_2}=a_{s_1}-a_{s_2}=b_n-b_m\Rightarrow a_{t_1}+a_{s_2}=a_{s_1}+a_{t_2}$$

依照 A 的條件可得 $\{a_{t_1},\ a_{s_2}\}=\{a_{s_1},\ a_{t_2}\}$，又 $a_{t_1}\neq a_{t_2},\ a_{s_1}\neq a_{s_2}$，所以 $a_{t_1}=a_{s_1},\ a_{t_2}=a_{s_2}\Rightarrow\{a_{t_1}+b_m\}=C_m\cap C_n$ (矛盾於 $|C_m\cap C_n|\geq 2$)，故 $|C_m\cap C_n|\leq 1\ (m\neq n)$。
由排容原理可得

$$\begin{aligned}|A+B|=\bigcup_{k=1}^{14}C_k&\geq\sum_{k=1}^{14}|C_k|-\sum_{1\leq m<n\leq 14}|C_m\cap C_n|\\&=252-91=161\end{aligned}$$

另一方面令 $A=\{2,\ 2^2,\ 2^3,\ \dots,\ 2^{18}\},\ B=\{2,\ 2^2,\ 2^3,\ \dots,\ 2^{14}\}$，則對所有 $m\neq n\neq k,\ C_m\cap C_n=\{2^m+2^n\}$ 且 $C_m\cap C_n\cap C_k=\phi$，因此 $|A+B|=161$，故 $|A+B|$ 的最小值為 161。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨爲「109 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。