

雙週一題網路數學問題徵答 109 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 109.11.27 公佈，109.12.11 中午 12 點截止

已知複數 z_1, z_2 滿足 $|z_1 + z_2| = 24$, $|z_1^2 + z_2^2| = 16$, 求 $|z_1^3 + z_2^3|$ 的最小值。 答
案：6336

解答：已知

$$\begin{aligned} |z_1^3 + z_2^3| &= |z_1 + z_2| \cdot |z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2| \\ &= 24 \times \left| \frac{3}{2}(z_1^2 + z_2^2) - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)^2 \right| \\ &\geq 24 \times \left| \frac{3}{2}|z_1^2 + z_2^2| - \frac{1}{2}|z_1 + z_2|^2 \right| = 6336 \end{aligned}$$

由三角不等式可知等號成立若且唯若 $z_1 + z_2 = 24(\cos \theta + i \sin \theta)$, $z_1^2 + z_2^2 = 16(\cos \theta + i \sin \theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$, 其中當 θ 為 0 時可得其中一組解 z_1, z_2 為 $12 + 2\sqrt{34}i, 12 - 2\sqrt{34}i$ 。

故在滿足題意之條件下 $|z_1^3 + z_2^3|$ 的最小值會發生且為 6336。 \square

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨為「109 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。