雙週一題網路數學問題徵答
109 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 109.11.13 公佈，109.11.27 中午 12 點截止

設 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\ a_5$ 為 1 至 202 內相異的整數
請問滿足 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5)^2$ 的序對 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ 有幾組? 答案：32

解答： 由柯西不等式得知因為等號成立所以 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}=\frac{a_4}{a_5}$，即 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 為等比數列，又因為彼此相異所以公差 $r\neq 1$。
設 $r=\frac{n}{m}$ 其中 $(m,n)=1$，先假設 $n>m$，此時 $a_5=\frac{a_1n^4}{m^4}$，由於 $(m^4,n^4)=1$，因此設 $t=\frac{a_1}{m^4},\ t\in\mathbb{N}$ 則 $a_1=tm^4,\ a_2=tm^3n,\ a_3=tm^2n^2,\ a_4=tmn^3,\ a_5=tn^4$ 且 $a_4=tn^4\leq 202$ 所以滿足 $t\in\mathbb{N}$ 的值有 $\left[\frac{202}{n^4}\right]$ 個。
由於 $4^4=256>202$ 且 r 為最簡，故僅需考慮 $r=2,\ 3,\ \frac{3}{2}$，而與此公比相符的等比數列總共有 $\left[\frac{202}{16}\right]+\left[\frac{202}{81}\right]+\left[\frac{202}{81}\right]=16$ 個則當 $n>m$ 時由對稱性可知也會有 16 組符合條件的等比數列，故總計有 32 組 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ 符合條件。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨為「109 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。