雙週一題網路數學問題徵答
109 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第四題： 109.10.30 公佈，109.11.13 中午 12 點截止

令 $f(\theta)=\sqrt{10-6\cos\theta}+\sqrt{\frac{17}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\theta}+\sqrt{19-2\sqrt{2}\cos\theta-8\sin\theta}$，求 $f(\theta)$ 的最小值。

答案：$\frac{21\sqrt{2}}{4}-1$

解答： 由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，經由完全配方可得

$$\sqrt{10-6\cos\theta}=\sqrt{(\cos\theta-3)^2+\sin^2\theta}$$

$$\sqrt{\frac{17}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\theta}=\sqrt{\cos^2\theta+\left(\sin\theta-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

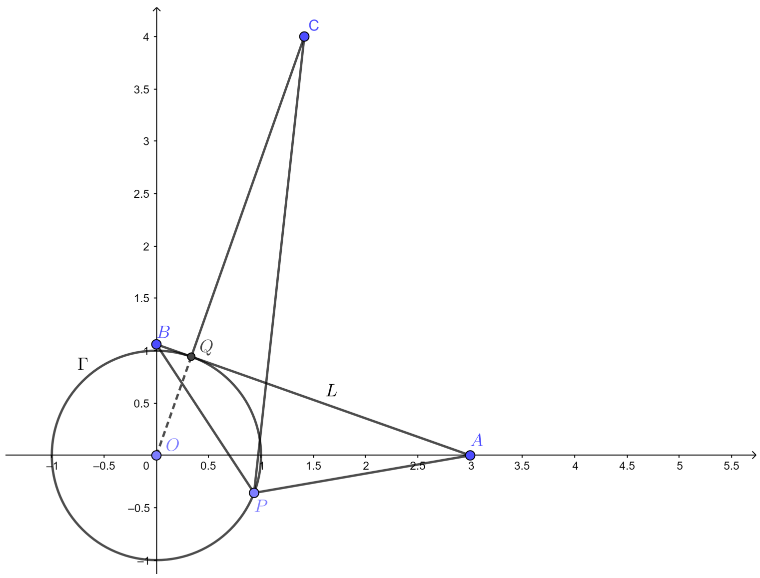
$$\sqrt{19-2\sqrt{2}\cos\theta-8\sin\theta}=\sqrt{\left(\cos\theta-\sqrt{2}\right)^2+(\sin\theta-4)^2}$$

所以

$$f(\theta)=\sqrt{(\cos\theta-3)^2+\sin^2\theta}+\sqrt{\cos^2\theta+\left(\sin\theta-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(\cos\theta-\sqrt{2}\right)^2+(\sin\theta-4)^2}$$

因此 $f(\theta)$ 的值可視爲圓 $\Gamma: x^2+y^2=1$ 上的某一點 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 與 $A(3,0)$, $B\left(0,\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, $C(\sqrt{2},4)$ 之距離總和：$f(\theta)=\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$。
觀察圖可發現直線 $\overline{AB}:\frac{x}{3}+\frac{y}{\frac{3\sqrt{2}}{4}}=1$ 爲圓 $x^2+y^2=1$ 的切線，故當 P 爲 $\overline{AB}$ 與圓 Γ 的切點時 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值 $\overline{AB}$。
又假設圓 $\Gamma: x^2+y^2=1$ 其圓心爲 O，當圓外一點 C 與圓上一點 P 距離最小時 P 爲線段 $\overline{OC}$ 與 Γ 的交點，即 $\overline{PC}$ 的最小值爲 $\overline{OC}-r=\overline{OC}-1$。再觀察圖可發現 $\overline{OC}\perp\overline{AB}$，且 $\overline{AB}$ 爲 Γ 的切線，所以 $\overline{OC}$ 與 Γ 的交點爲 $\overline{AB}$ 與圓 Γ 的切點。
因此設 Q 爲 $\overline{AB}$ 與圓 Γ 的切點時

$$f(x)=\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geq\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}=\overline{AB}+\overline{OC}-1=\frac{21\sqrt{2}}{4}-1 \quad \square$$



答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨爲「109 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。