

雙週一題網路數學問題徵答 109 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 109.10.16 公佈，109.10.30 中午 12 點截止

令 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{35} = \frac{a}{35!}$ ，求 a 除以 19 的餘數。 答案：10

解答：已知 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{35} = \frac{a}{35!}$ 可得 $a = 35!(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{35})$ ，等式乘開後除了 $\frac{35!}{19}$ 不確定能被 19 整除，其餘項均能被 19 整除，因此設 b 為 a 除以 19 的餘數則 $b \equiv \frac{35!}{19} \equiv (1 \cdots 18) \cdot (1 \cdots 16) \pmod{19}$ 。由威爾遜定理得知對所有 $n > 1, n \in \mathbb{N}$ ，則 $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ 若且唯若 n 為質數。因為 19 為質數且 $18 \cdot 18 \equiv 1 \pmod{19}$, $17 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{19}$ ，所以 $b \equiv (1 \cdots 18) \cdot (1 \cdots 16) \cdot 17 \cdot 18 \cdot 9 \cdot 18 \equiv (18!)^2 \cdot 9 \cdot 18 \equiv (-1)^2 \cdot 9 \cdot 18 \equiv 10 \pmod{19}$ 。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨為「109 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。