雙週一題網路數學問題徵答
107 年度第 2 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第八題：　108.06.07 公佈，108.06.21 中午 12 點截止

令 k 爲一個正整數，且 $m=2^k+1$，假設 $r\neq 1$ 是 $z^m-1=0$ 的一個虛根。試證明存在二個整係數多項式 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 使得

$$(P(r))^2+(Q(r))^2=-1$$

解答： 因爲 $r\neq 1$ 且 $r^m-1=(r-1)(r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+1)=0$，所以由前者可知 $r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+1=0$，將 1 移到等式的另一側得到下列式子

$$\begin{aligned}
-1 &= r(1+r+r^2+\cdots+r^{m-2})\\
&= r(1+r+r^2+\cdots+r^{2^k-1})\\
&= r\prod_{i=0}^{k-1}\left(1+r^{2^i}\right) && \text{(2 的冪次性質)}\\
&= r(1+r)(1+r^2)(1+r^4)\cdots(1+r^{2^{k-1}})\\
&= (r+r^2)(1+r^2)(1+r^4)\cdots(1+r^{2^{k-1}})\\
&= (r^{2^k+2}+r^2)(1+r^2)(1+r^4)\cdots(1+r^{2^{k-1}}) && (r^{2^k+1}=1)\\
&= \left(\left(r^{2^{k-1}+1}\right)^2+r^2\right)(1+r^2)(1+r^4)\cdots(1+r^{2^{k-1}}) && (1)
\end{aligned}$$

當 $k=2$ 時可得知 $1+r+r^2+r^3=(1+r)(1+r^2)$，2 的冪次性質之一般式可藉由簡單的歸納法來證明，所以

$$1+r+r^2+\cdots+r^{2^k-1}=(1+r)(1+r^2)(1+r^4)\cdots(1+r^{2^{k-1}})$$

因爲 $r+r^2=r^{m+1}+r^2$ 且 $m+1=2(2^{k-1}+1)$，可發現在最後一個展開式 (1) 中，每個分解出來的因式都是兩平方之和，亦即每一項都是多項式的平方，可重複應用拉格朗日恆等式：

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

(拉格朗日恆等式的介紹可參考數學世界的文章：
`http://mathworld.wolfram.com/LagrangesIdentity.html`)
將 (1) 表示爲兩平方之和，所以可將 -1 轉換成 P^2+Q^2，因此 P 和 Q 都是 r 的整係數多項式，故得證。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「108 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。