雙週一題網路數學問題徵答
107 年度第 2 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第七題：　　108.05.24 公佈，108.06.07 中午 12 點截止

假設 $A,\ B,\ C$ 代表在 $\mathbb{R}^2$ 中相異的整數座標點。證明如果

$$(\overline{AB}+\overline{BC})^2 < 8\cdot[ABC]+1$$

則 $A,\ B,\ C$ 是一個正方形的三個頂點。這裡 $[ABC]$ 表示三角形 ABC 的面積。

解答：根據算幾不等式 $|\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2 \geq 2|\overline{AB}||\overline{BC}|$，等號成立時若且唯若 $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$；而由 SAS 面積公式可得到 $|\overline{AB}||\overline{BC}| \geq 2[ABC]$，等號成立時若且唯若 $\angle B = 90^\circ$。

由上面兩個不等式可得到 $4[ABC] \leq |\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2$，且其等號成立時，上面兩個不等式的等號也要成立，即 $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ 和 $\angle B = 90^\circ$。

因爲 $A,\ B,\ C$ 都是整數點座標，所以 $\overline{AB}^2$ 和 $\overline{BC}^2$ 也是整數，由鞋帶定理可得到 $2[ABC]$ 亦爲整數。因此

$$\begin{aligned}
8[ABC] &= 4[ABC]+4[ABC] \\
&\leq |\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2+4[ABC] \qquad (1)\\
&\leq |\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2+2|\overline{AB}||\overline{BC}| \qquad (2)\\
&= (\overline{AB}+\overline{BC})^2 \\
&< 8[ABC]+1
\end{aligned}$$

得到 $8[ABC] \leq |\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2+4[ABC] \leq |\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2+2|\overline{AB}||\overline{BC}| < 8[ABC]+1$。因爲 $8[ABC]$ 和 $8[ABC]+1$ 是兩個相鄰的整數，且 $|\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2+4[ABC]$ 和 $|\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2+2|\overline{AB}||\overline{BC}|$ 也是整數，所以上面兩個不等式 (1), (2) 中的等號皆成立，因此 $4[ABC] = |\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2$，再由上面可知 $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ 和 $\angle B = 90^\circ$，故得證。 $\square$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「108 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。