雙週一題網路數學問題徵答
107 年度第 2 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 108.05.10 公佈，108.05.24 中午 12 點截止

證明對所有實數 $x,\ z$ $(|x|<1,\ |z|>1)$

$$1+\sum_{j=1}^{\infty}(1+x^j)P_j=0$$

其中 P_j 爲：

$$\frac{(1-z)(1-zx)(1-zx^2)\cdots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)(z-x^3)\cdots(z-x^j)}$$

解答： 設 $S_0=1$，對 $n\geq 1$，設

$$S_n=1+\sum_{j=1}^{n}(1+x^j)\frac{(1-z)(1-zx)(1-zx^2)\cdots(1-zx^{j-1})}{(z-x)(z-x^2)(z-x^3)\cdots(z-x^j)}$$

接著用歸納法來證明：

$$S_n=\frac{(1-zx)(1-zx^2)\cdots(1-zx^n)}{(z-x)(z-x^2)(z-x^3)\cdots(z-x^n)},\quad n\geq 1$$

當 $n=1$，可推得 $S_1=1+(1+x)(1-z)/(z-x)=(1-zx)/(z-x)$ 成立。假設當 $n=k$，

$$S_k=\frac{(1-zx)(1-zx^2)\cdots(1-zx^k)}{(z-x)(z-x^2)(z-x^3)\cdots(z-x^k)}$$

成立，則當 $n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned}
S_{k+1}&=S_k+(1+x^{k+1})\frac{(1-z)(1-zx)(1-zx^2)\cdots(1-zx^k)}{(z-x)(z-x^2)(z-x^3)\cdots(z-x^{k+1})}\\
&=\frac{(1-zx)(1-zx^2)\cdots(1-zx^k)}{(z-x)(z-x^2)(z-x^3)\cdots(z-x^k)}\\
&\quad+(1+x^{k+1})\frac{(1-z)(1-zx)(1-zx^2)\cdots(1-zx^k)}{(z-x)(z-x^2)(z-x^3)\cdots(z-x^{k+1})}\\
&=\frac{(1-zx)(1-zx^2)\cdots(1-zx^k)}{(z-x)(z-x^2)(z-x^3)\cdots(z-x^k)}\left(1+(1+x^{k+1})\frac{(1-z)}{(z-x^{k+1})}\right)\\
&=\frac{(1-zx)(1-zx^2)\cdots(1-zx^k)(1-zx^{k+1})}{(z-x)(z-x^2)(z-x^3)\cdots(z-x^k)(z-x^{k+1})}
\end{aligned}$$

因此，藉由歸納法可得證。

剩下只需證明 $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$。若對於某些 n, $S_n = 0$，那麼對於所有 $N \geq n$, $S_N = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$。此外，當 $n \to \infty$ 且因爲 $x^{n+1} \to 0$，則：

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1 - zx^{n+1}}{z - x^{n+1}} \to \frac{1}{z}$$

因此，藉由比例檢定可得知 $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$，故得證。 $\square$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「108 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。