

雙週一題網路數學問題徵答
107 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 108.04.26 公佈，108.05.10 中午 12 點截止

假設

$$\frac{1}{4!19!} + \frac{1}{5!18!} + \frac{1}{6!17!} + \frac{1}{7!16!} + \frac{1}{8!15!} + \frac{1}{9!14!} + \frac{1}{10!13!} + \frac{1}{11!12!} = \frac{N}{1!22!}$$

試求 N 的值。

答案：182272

解答：方程式兩邊同乘 $23!$ 得到：

$$\frac{23!}{4!19!} + \frac{23!}{5!18!} + \frac{23!}{6!17!} + \frac{23!}{7!16!} + \frac{23!}{8!15!} + \frac{23!}{9!14!} + \frac{23!}{10!13!} + \frac{23!}{11!12!} = \frac{23!N}{1!22!}$$

$$\binom{23}{4} + \binom{23}{5} + \binom{23}{6} + \binom{23}{7} + \binom{23}{8} + \binom{23}{9} + \binom{23}{10} + \binom{23}{11} = 23N$$

運用 $2^{23} = \sum_{n=0}^{23} \binom{23}{n}$ 。由於 $\binom{23}{n} = \binom{23}{23-n}$ ，所以 $\sum_{n=0}^{11} \binom{23}{n} = \frac{2^{23}}{2} = 2^{22}$ 。

因此 $23N = 2^{22} - \binom{23}{3} - \binom{23}{2} - \binom{23}{1} - \binom{23}{0} = 2^{22} - 1771 - 253 - 23 - 1 = (2^{11})^2 - 2048 = (2048)^2 - 2048 = 4192256$ 。

所以， $N = \frac{4192256}{23} = 182272$ 。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「108 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。