雙週一題網路數學問題徵答
107 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第二題： 108.03.15 公佈，108.03.29 中午 12 點截止

假設 $A_k = \frac{k(k-1)}{2}\cos\frac{k(k-1)\pi}{2}$，試求 $|A_1 + A_2 + \cdots + A_{2018}|$。 答案：1009

解答： 此問題看起來相當嚇人，實際上它並不困難，$n = \frac{k(k-1)}{2}$ 計算出的值永遠爲一整數（三角數），且若 n 爲偶數，則 $n\pi$ 的餘弦值爲 1，若 n 爲奇數，則 $n\pi$ 的餘弦值爲 -1。因此若 $4 \mid k$ 或 $4 \mid k-1$ 則 $\frac{k(k-1)}{2}$ 爲偶數，而且反之亦然。

所以我們所求總和爲：

$$\left|\sum_{i=1}^{2018} A_i\right| = -\frac{1(0)}{2} + \frac{2(1)}{2} + \frac{3(2)}{2} - \frac{4(3)}{2} - \frac{5(4)}{2} + \frac{6(5)}{2} - \cdots - \frac{2017(2016)}{2} + \frac{2018(2017)}{2}$$

假如我們將這些項給分組，我們需要一個方程式 $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = \left(\frac{n}{2}\right)(n+1-(n-1)) = n$。所以前兩個分數加起來爲 1，下兩個爲 -3，等等。

假如我們將這些項再次配對，每一組相加爲 -2，則有 $\frac{2018-1+1}{2\cdot 2} \simeq 504$ 組，所以我們答案爲 $|-2\cdot 504| - \frac{2017(2016)}{2} + \frac{2018(2017)}{2} = 1009$。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「108 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號**和 **E-mail**。