

雙週一題網路數學問題徵答

107 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第一題： 108.03.01 公佈，108.03.15 中午 12 點截止

請問有幾組有次序的整數四變數值組 (a, b, c, d) 且 $0 < a < b < c < d < 500$ 滿足 $a + d = b + c$ 與 $bc - ad = 74$ ？ 答案：884

解答：【解法一】 令 $k = a + d = b + c$ 所以 $d = k - a$, $b = k - c$ 。可得到 $(k - c)c - a(k - a) = (a - c)(a + c - k) = (c - a)(d - c) = 74$ 。因此 $(c - a, d - c) = (1, 74), (2, 37), (37, 2), (74, 1)$ 。以 c 去表示得到 $(a, b, c, d) = (c - 74, c - 73, c, c + 1), (c - 37, c - 35, c, c + 2), (c - 1, c + 73, c, c + 74), (c - 2, c + 35, c, c + 37)$ 。最後兩個解並未符合 $a < b < c < d$ ，所以我們只須要考慮前兩個解。

第一個解得到 $c - 74 \geq 1$ 且 $c + 1 \leq 499 \Rightarrow 75 \leq c \leq 498$ ，第二個得到 $38 \leq c \leq 497$ 。

所以此四變數值組共有 $424 + 460 = 884$ 組。

【解法二】 令 $b = a + m$ 且 $c = a + m + n$ 。由於 $a + d = b + c$ 所以 $d = b + c - a = a + 2m + n$ 。

把 $b = a + m$, $c = a + m + n$ 與 $d = b + c - a = a + 2m + n$ 代入 $bc - ad = 74$, $bc - ad = (1 + m)(1 + m + n) - a(a + 2m + n) = m(m + n) = 74 = 2(37)$ 。因此 $(m, n) = (1, 73)$ 或是 $(2, 35)$ 。

對於 $(m, n) = (1, 73)$ ，我們知道 $0 < a < a + 1 < a + 74 < a + 75 < 500$ ，所以有 424 組四變數值組。對於 $(m, n) = (2, 35)$, $0 < a < a + 2 < a + 37 < a + 39 < 500$ 所以有 460 組四變數值組。加起來共有 $424 + 460 = 884$ 組變數值組。

【解法三】 將 $a + d = b + c$ 左右兩邊同時平方，目的是為了得到 bc 及 ad 這兩項，另外再將 $bc - ad = 74$ 代入，可得

$$\begin{aligned}(a + d)^2 &= (b + c)^2 \Rightarrow a^2 + 2ad + d^2 = b^2 + 2bc + c^2 \Rightarrow 2bc - 2ad = a^2 - b^2 + d^2 - c^2 \\ &\Rightarrow 2(bc - ad) = (a - b)(a + b) + (d - c)(d + c) \\ &\Rightarrow 148 = (a - b)(a + b) + (d - c)(d + c) \circ\end{aligned}$$

又因為 $a + d = b + c$ ，因此可改寫成

$$\begin{aligned}148 &= (c - d)(a + b) + (d - c)(d + c) \Rightarrow 148 = -(d - c)(a + b) + (d - c)(d + c) \\ &\Rightarrow 148 = (d - c)(d + c - a - b) \circ\end{aligned}$$

接著去找 148 的可能因數有哪些。由上式 $148 = (d - c)(d + c - a - b)$ 看出， $(d - c)$ 及 $(d + c - a - b)$ 必須是 148 的因子，其中 $(d + c - a - b)$ 必須比 $(d - c)$ 還大，

因此會有以下幾種可能結果，分別為 $1 \cdot 148$, $2 \cdot 74$, $4 \cdot 37$ 。當 $1 \cdot 148$ ，則會產成 424 組可能的解；當 $2 \cdot 74$ ，將不會有解，因為若 $c - d = 1$ ，則 $a + b$ 也必須相差 1，由於 74 為偶數，只可能是來自兩個不同的奇偶數所得出的結果，但是 $c - d$ 及 $a + b$ 皆為奇數，所以 $c + d - (a + b)$ 也一定為奇數；當 $4 \cdot 37$ ，則會產成 460 組可能的解。因此，答案為 $424 + 460 = 884$ 。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「108 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。