# 雙週一題網路數學問題徵答
# 108 年度第 1 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

**第八題：** 108.12.27 公佈，109.01.10 中午 12 點截止

考慮函數

$$f(x,n)=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}x+\binom{n}{4}x^2+\cdots}{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}x+\binom{n}{5}x^2+\cdots}$$

其中 $n$ 為正整數。試用 $f(x,n)$ 與 $x$ 的有理式來表示 $f(x,n+1)$。由此，或用別的方法，對適當的固定值 $x$ 求 $\lim_{n\to\infty} f(x,n)$。 答案：當 $x\ge 0$，極限為 $\sqrt{x}$；當 $x<0$ 極限不存在

解答： 因為

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1},\quad f(x,n+1)=\frac{f(x,n)+x}{f(x,n)+1}$$

若 $x$ 能使 $f(x,n)$ 收斂當 $n$ 趨近於無窮大時，記極限為 $F(x)$ 必滿足 $F(x)=(F(x)+x)/(F(x)+1)$, $F^2(x)=x$。當 $x=0,\ 1$ 顯然收斂於 $\sqrt{x}$。現在證明對任何正數 $x$ 都收斂於 $\sqrt{x}$。注意(可用歸納法證明)

$$f(x,n)=\sqrt{x}\frac{(1+\sqrt{x})^n+(1-\sqrt{x})^n}{(1+\sqrt{x})^n-(1-\sqrt{x})^n}$$

當 $0<x<1$，記 $a=(1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})$;則 $0<a<1$ 而

$$f(x,n)=\sqrt{x}\frac{1+a^n}{1-a^n}\to\sqrt{x}$$

當 $x>1$，記 $b=(\sqrt{x}-1)/(\sqrt{x}+1)$;則 $0<b<1$ 而

$$f(x,n)=\sqrt{x}\frac{1+(-b)^n}{1-(-b)^n}\to\sqrt{x}$$

當 $x<0$，極限不存在。若 $x$ 為其他複數，則 $\sqrt{x}$ 的兩根關於原點對稱，必有一個處於右半平面。經過不太複雜的演算可知 $f(x,n)$ 的極限存在，且等於 $x$ 在右半平面的那個平方根。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨為「108 年秋季第 $X$ 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。