

雙週一題網路數學問題徵答 108 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 108.12.13 公佈，108.12.27 中午 12 點截止

設遞迴關係 $u_{n+1} = 2u_n - n^2$, $u_0 = a$, 求 a 的條件使得 $u_n > 0$ 對所有的 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。
答案： $a \geq 3$

解答：我們證明對於所有 $n \geq 0$ 有 $u_n > 0$ 若且唯若 $a \geq 3$ 。令 $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$, 那麼遞迴關係為 $(1 - \Delta)u_n = n^2$, 因為 n^2 是一個多項式，有特解為

$$u_n = (1 - \Delta)^{-1}n^2 = (1 + \Delta + \Delta^2 + \dots)n^2 = n^2 + (2n + 1) + 1 = n^2 + 2n + 3$$

因為 $\nu = k \cdot 2^n$ 是齊次差分方程式 $\nu_{n+1} - 2\nu_n = 0$ 的解，所以完整的解為 $u_n = n^2 + 2n + 3 + k \cdot 2^n$ 。要求有 $u_0 = a$ 的解為 $u_n = n^2 + 2n + 3 + (a - 3)2^n$ 。因為 $\lim_{n \rightarrow \infty} [2^n / (n^2 + 2n + 3)] = +\infty$, 當 $a - 3 < 0$ 時，對於夠大的 n , u_n 會是負的，相反的，如果 $a - 3 \geq 0$, 則每一個 $u_n > 0$ 。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨為「108 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。