雙週一題網路數學問題徵答
108 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 108.11.29 公佈，108.12.13 中午 12 點截止

設 $P(z)=z^2+az+b$ 為複數 z 之多項式，其中係數 a,b 為複數。假設對所有 z，滿足 $|z|=1$，使得 $|P(z)|=1$，証明 $a=b=0$。

解答：**【解法一】** 設 $P(z)=z^2+az+b$ 且 $a=p+iq,\ b=r+is$，其中 $p,\ q,\ r,\ s$ 皆為實數。由題目的條件可知，由於 $|1|=|-1|=|i|=|-i|$，所以 $|P(1)|=|P(-1)|=|P(i)|=|P(-i)|=1$ 將代入 $a=p+iq,\ b=r+is$ 可得

$$
\begin{aligned}
|P(1)|^2 &= |1+p+iq+r+is|^2 \\
&= 1+p^2+q^2+r^2+s^2+2p+2r+2pr+2qs \qquad (1)\\
|P(-1)|^2 &= |1-p-iq+r+is|^2 \\
&= 1+p^2+q^2+r^2+s^2-2p+2r-2pr-2qs \qquad (2)\\
|P(i)|^2 &= |-1+ip-q+r+is|^2 \\
&= 1+p^2+q^2+r^2+s^2+2q-2r-2qr+2ps \qquad (3)\\
|P(-i)|^2 &= |-1-ip+q+r+is|^2 \\
&= 1+p^2+q^2+r^2+s^2-2q-2r+2qr-2ps \qquad (4)
\end{aligned}
$$

將上述四個方程式 (1)-(4) 相加，可得

$$4=4+4(p^2+q^2+r^2+s^2)$$

由此可知 $p=q=r=s=0$，所以 $a=b=0$。

【解法二】 設 ε 為 1 的 n 次單位原根 (primitive root)，其中 $n>2$，則利用複數長度可得

$$n=\sum_{k=1}^{n}|P(\varepsilon^k)|^2=n(1+|a|^2+|b|^2)$$

所以 $a=b=0$。

【解法三】 藉由積分來取代和來做計算。對所有實數 θ，長度為 1 的複數 z 可表示為 $e^{i\theta}$，則

$$
\begin{aligned}
1=|P(e^{i\theta})|^2 &= (e^{2i\theta}+ae^{i\theta}+b)(e^{-2i\theta}+\overline{a}e^{-i\theta}+\overline{b}) \\
&= \overline{b}e^{2i\theta}+(\overline{a}+a\overline{b})e^{i\theta}+1+|a|^2+|b|^2+(a+\overline{a}b)e^{-i\theta}+be^{-2i\theta}
\end{aligned}
$$

假設積分範圍爲 $[0,2\pi]$，可得 $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=0$ (即 $\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}\,\mathrm{d}\theta=0$)，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\theta&=\int_0^{2\pi}\left(\bar{b}e^{2i\theta}+(\bar{a}+a\bar{b})e^{i\theta}+1+|a|^2+|b|^2+(a+\bar{a}b)e^{-i\theta}+be^{-2i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta\\2\pi&=2\pi\left(1+|a|^2+|b|^2\right)\end{aligned}$$

因此 $a=b=0$。

【解法四】 設 α,β,γ 爲複數，使得 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ 且 $\alpha+\beta+\gamma=3$，則 $\alpha=\beta=\gamma=1$。設 $w=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
爲三次方程式之一根，則

$$|P(1)|=|wP(w)|=|w^2P(w^2)|=1$$

且

$$P(1)+wP(w)+w^2P(w^2)=(1+a+b)+(1+aw^2+bw)+(1+aw+bw^2)=3$$

所以 $P(1)=wP(w)=w^2P(w^2)=1$，也就是 $P(1)=1$，$P(w)=w^{-1}=w^2$, $P(w^2)=w^{-2}=w^4$。因爲只有多項式 $P(z)=z^2$ 在次方小於 3 次且滿足條件，所以 $a=b=0$。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨爲「108 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。