

雙週一題網路數學問題徵答 108 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 108.11.15 公佈，108.11.29 中午 12 點截止

對於 $t = 0, 1, 2, 3, 4$ ，定義 $S_t = \sum_{i=1}^{110} a_i^t$ ，其中 $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ 。假如 $S_1 = 310$ 與 $S_4 = 13010$ ，試求 S_2 的最大和最小值。 答案：1010, 998

解答：因為 a_i 的順序不重要，所以令 w, x, y 與 z 分別表示 $a_i = 1, 2, 3$ 與 4 的個數。然而我們基於這些變數寫出三個方程式。因為總共有 110 個 a_i ，所以我們可得知

$$w + x + y + z = S_0 = 110 \quad (1)$$

$$w + 2x + 3y + 4z = S_1 = 310 \quad (2)$$

$$w + 16x + 81y + 256z = S_4 = 13010 \quad (3)$$

現在我們能解出這兩個變數：

$$w = 110 - x - y - z \quad (4)$$

將 (4) 分別代入 (2) 及 (3) 中，可得

$$x + 2y + 3z = 200 \quad (5)$$

及

$$\begin{aligned} 15x + 80y + 255z &= 12900 \\ \Rightarrow 3x + 16y + 51z &= 2580 \end{aligned} \quad (6)$$

進而，將 (5) 改寫成

$$x = 200 - 2y - 3z \quad (7)$$

並將 (7) 代入 (6) 即可得

$$\begin{aligned} 3(200 - 2y - 3z) + 16y + 51z &= 2580 \\ \Rightarrow 600 + 10y + 42z &= 2580 \\ \Rightarrow 5y + 21z &= 990 \end{aligned}$$

由於 y 與 z 為非負整數，這兩個解為 $(y, z) = (9, 45)$ 或 $(30, 40)$ 。求得 $w = 9$, $x = 47$, $y = 9$ 與 $z = 45$ 和 $w = 20$, $x = 20$, $y = 30$ 與 $z = 40$ ，將前者代入 S_2 可得 $S_2 = 9 + 4 \times 47 + 9 \times 9 + 16 \times 45 = 998$ 為最小值，後者代入 S_2 可得 $S_2 = 20 + 4 \times 20 + 9 \times 30 + 16 \times 40 = 1010$ 為最大值。 \square

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或
傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com
(主旨為「108 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣
市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。