

雙週一題網路數學問題徵答 108 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第四題： 108.11.01 公佈，108.11.15 中午 12 點截止

假設 x, y 與 z 為實數且滿足：

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{y^2 - \frac{1}{36}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{36}} \\y &= \sqrt{z^2 - \frac{1}{49}} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{49}} \\z &= \sqrt{x^2 - \frac{1}{64}} + \sqrt{y^2 - \frac{1}{64}}\end{aligned}$$

試求 x, y, z 。

答案： $x = \frac{4}{7\sqrt{15}}, y = \frac{2}{3\sqrt{15}}, z = \frac{16}{21\sqrt{15}}$

解答：設三角形 $\triangle XYZ$ 的邊長為 x, y 與 z ，且假設此三角形為銳角三角形(所以全部的高皆落在三角形內部)。令邊長為 x 的高為 h_x ，同樣地，另兩邊的高為 h_y 與 h_z ，則我們利用畢氏定理得 $x = \sqrt{y^2 - h_x^2} + \sqrt{z^2 - h_x^2}$ 。作為 h_x 的一個函數，方程式的等號右邊為嚴格遞減，所以在它範圍內函數值與自變數為一對一對應，因此有 $h_x^2 = \frac{1}{36}$ ，所以 $h_x = \frac{1}{6}$ ，同樣的 $h_y = \frac{1}{7}$ 與 $h_z = \frac{1}{8}$ 。由三角形面積得， $x \times h_x = y \cdot h_y = z \times h_z$ ，所以 $\frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8} = 2A$ 且 $x = 12A, y = 14A$ 與 $z = 16A$ 。此三角形半周長為 $s = \frac{12A+14A+16A}{2} = 21A$ ，由海龍公式，我們得 $A = \sqrt{21A \times 9A \times 7A \times 5A} = 21A^2\sqrt{15}$ ，因此 $A = \frac{1}{21\sqrt{15}}$ ，所以 $x = \frac{4}{7\sqrt{15}}, y = \frac{2}{3\sqrt{15}}, z = \frac{16}{21\sqrt{15}}$ 。□

有一個銳角三角形其邊長為 x, y 與 z 存在的理由：注意到 x, y 與 z 為兩個正實數平方根和，所以 $x, y, z \geq 0$ ，且 $\sqrt{y^2 - \frac{1}{36}} < \sqrt{y^2} = y$ ，因此有 $x < y + z, y < z + x$ 與 $z < x + y$ ，所以滿足這些條件的三角形存在。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨為「108 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。