

雙週一題網路數學問題徵答 108 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 108.10.18 公佈，108.11.01 中午 12 點截止

假設一數列滿足 $x_0 = 2$ 與 $|x_k| = |x_{k-1} + 1|$, $k \geq 1$ ，試求 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_{2019}|$ 的最小值。 答案：44

解答：已知 $|x_k| = |x_{k-1} + 1|$ ，所以將方程式兩邊平方去掉絕對值，得到：

$$x_k^2 = x_{k-1}^2 + 2x_{k-1} + 1 \Rightarrow x_k^2 - x_{k-1}^2 = 2x_{k-1} + 1$$

因此

$$\begin{aligned}x_1^2 - x_0^2 &= 2x_0 + 1 \\x_2^2 - x_1^2 &= 2x_1 + 1 \\&\vdots \\x_{2020}^2 - x_{2019}^2 &= 2x_{2019} + 1\end{aligned}$$

將 2020 條方程式作加總，可得：

$$x_{2020}^2 = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2019}) + 2028$$

因此 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_{2019}| = \frac{|x_{2020}^2 - 2028|}{2}$ 。

直接帶入可得到：當 $k = 1$ 時， $x_1 = \{-3, 3\}$ ， $k = 2$ 時， $x_2 = \{-4, -2, 2, 4\} \cdots$ ，所以由歸納法我們可推得 $x_{2020} = \{-2022, -2020, \dots, 44, 46, \dots, 2020, 2022\}$ 。所以我們取 $x_{2020} = 46$ (因為 $46^2 = 2116$ 最接近 2028)，因此 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_{2019}| = \left| \frac{(2116 - 2028)}{2} \right| = 44$ 。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2019@gmail.com (主旨為「108 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。