雙週一題網路數學問題徵答
106 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 107.06.15 公佈，107.06.29 中午 12 點截止

若 A, B 和 C 為三角形 $\triangle ABC$ 的三個內角角度(弧度)，試證

$$A\cos B + \sin A\cos C > 0$$

解答： 將角度 B 分為銳角及鈍角兩種情況討論：

(a) 情況一：若 B 為銳角，亦即 $0 < B < \frac{\pi}{2}$，則 $\cos B > 0$。當 $A > 0$ 時，

$$A > \sin A \tag{1}$$

因此將 (1) 中不等式兩邊同乘 $\cos B$，可得出

$$A\cos B > \sin A\cos B \tag{2}$$

同理利用三角形內角和為 $180^\circ = \pi$ 弧度，將 C 表示成 $C = \pi - A - B$。因為 $C < \pi - B$ 且 $0 < C < \pi$，再利用餘弦補角關係可得

$$\cos C > \cos(\pi - B) = -\cos B \Rightarrow \cos B + \cos C > 0 \tag{3}$$

由 (2) 及 (3) 的結果得出

$$A\cos B + \sin A\cos C > \sin A\cos B + \sin A\cos C = \sin A(\cos B + \cos C) > 0$$

因此所欲證的不等式在情況一是成立的。

(b) 情況二：若 B 為鈍角，亦即 $\frac{\pi}{2} \leq B < \pi$，則 $\cos B < 0$。當 $0 < A < \frac{\pi}{2}$ 時，

$$A < \tan A \text{ 且 } \tan A > 0 \tag{4}$$

因此將 (4) 中不等式兩邊同乘 $\cos B$，可得出

$$A\cos B \geq \tan A\cos B \tag{5}$$

同理利用三角形內角和為 $180^\circ = \pi$ 弧度，將 B 表示成 $B = \pi - A - C$。再利用餘弦補角關係及餘弦和角公式可得

$$\begin{aligned}
\cos B + \cos A\cos C &= \cos(\pi - (A + C)) + \cos A\cos C && \text{(餘弦補角關係)}\\
&= -\cos(A + C) + \cos A\cos C && \text{(餘弦和角公式)}\\
&= \sin A\sin B > 0 && (6)
\end{aligned}$$

由 (5) 及 (6) 的結果與三角函數商數關係得出

$$\begin{aligned} A\cos B+\sin A\cos C &\geq \tan A\cos B+\sin A\cos C \\ &= \tan A(\cos B+\cos A\cos C) > 0 \end{aligned}$$

因此所欲證的不等式在情況二也是成立的。 $\square$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「107 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。