雙週一題網路數學問題徵答
106 年度第 2 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第七題：　　107.06.01 公佈，107.06.15 中午 12 點截止

假設 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 1)$ 是實數且滿足

$$A + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 < \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

證明對於任意 i, j 滿足 $1 \le i < j \le n$，則 $A < 2a_ia_j$。

解答： 在考慮 $i = 1,\ j = 2$ 的情形下，由柯西不等式，可得

$$[(a_1 + a_2) + a_3 + a_4 + \cdots + a_n]^2 \le [1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2][(a_1 + a_2)^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2]$$

或

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le (n-1)\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + 2a_1a_2\right] \Rightarrow \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + 2a_1a_2$$

再利用題目所假設的條件，得出

$$A < -\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le -\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + 2a_1a_2 = 2a_1a_2$$

同理，對於 $1 \le i < j \le n$，亦可推得出 $A < 2a_ia_j$。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「107 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。