

雙週一題網路數學問題徵答 106 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 107.05.18 公佈，107.06.01 中午 12 點截止

試求下列式子的最小正整數解 答案：139

$$\tan 23x^\circ = \frac{\cos 92^\circ + \sin 92^\circ}{\cos 92^\circ - \sin 92^\circ}$$

解答：利用餘角關係將 \cos 化成 \sin ，再運用 \sin 的和差化積，化簡成以下式子

$$\begin{aligned} \frac{\cos 92^\circ + \sin 92^\circ}{\cos 92^\circ - \sin 92^\circ} &= \frac{\sin 182^\circ + \sin 92^\circ}{\sin 182^\circ - \sin 92^\circ} = \frac{\sin(137^\circ + 45^\circ) + \sin(137^\circ - 45^\circ)}{\sin(137^\circ + 45^\circ) - \sin(137^\circ - 45^\circ)} = \\ &= \frac{2 \sin 137^\circ \cos 45^\circ}{2 \cos 137^\circ \sin 45^\circ} = \tan 137^\circ \end{aligned}$$

因為正切函數的週期為 180° ，且該函數其定義域上為 1 對 1 的。因此，

$$23x \equiv 137 \pmod{180} \quad (1)$$

將 (1) 兩邊乘上 8 可得

$$\begin{aligned} 23 \cdot 8x &\equiv 137 \cdot 8 \equiv 16 \pmod{180} \\ \Rightarrow 184x &\equiv 16 \pmod{180} \\ \Rightarrow 4x &\equiv 16 \pmod{180} \end{aligned} \quad (2)$$

因為在 (2) 中， $\gcd(4, 180) = 4$ ，且 $4 \mid 16$ ，所以在 $\text{mod } 180$ 之下會有四個解。將 (2) 化簡可得，

$$x \equiv 4 \pmod{\left(\frac{180}{4}\right)} \Rightarrow x = 4 + 45t, \quad t = 0, 1, 2, 3$$

由得出的四個解中，僅在 $t = 3 \Rightarrow x = 139$ 時是符合的，因此最小的正數解為 $x = 139$ 。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「107 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。