

雙週一題網路數學問題徵答 106 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 107.05.04 公佈，107.05.18 中午 12 點截止

給定一相異實數 r_1, r_2, \dots, r_n 的數列，能藉著一個或多個氣泡通過的方式以遞增次序排列。對一已知的數列作一個氣泡通過是把該數列的第二項與第一項作比較，兩項必需交換若且唯若第二項是較小的數值，進而將第三項與第二項作比較，兩項必需交換若且唯若第三項是較小的數值，以此類推，一直做到最後一項 r_n 與其前面的項都進行過兩兩的比較，當它們必需對調若且唯若最後一項 r_n 是較小的數值。

以下例子說明數列 2, 0, 1, 8，藉由一個氣泡通過而被轉換成新數列 0, 1, 2, 8，且在每一步兩兩進行比較都會以下底線作表示。

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 8 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 8 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}$$

假設 $n = 50$ ，而最初的數列為 r_1, r_2, \dots, r_{50} ，其中各項數值皆為不同的實數且次序是以隨機方式排列。試求經過一次的氣泡通過之後， r_{25} 正好會落在第 40 個位置的機率。
答案： $\frac{1}{1640}$

解答：假如 r_1, \dots, r_{24} 中最大的數大於 r_{25} ，則將在第一次氣泡通過的第 24 步中會與 r_{25} 作比較，而且 r_{25} 將會移動到第 24 個位置。因此 r_{25} 必須是前 25 項中最大的數。

此外，為了讓 r_{25} 移動到第 40 個位置，但不能繼續向右移動到第 41 個位置，所以 r_{25} 必須大於 $r_{26}, r_{27}, \dots, r_{40}$ ，但要小於 r_{41} 。

因此，能重新將問題敘述成，請問 50 個不同實數的數列，在前 41 項中，最大數在第 41 個位置並且第二大的數在第 25 個位置的機率為何？

將原題目改成以上面的方式敘述，就變得比較容易去解決：在 50 個不同實數的數列中，僅須考慮前 41 個數的排列方式。共有 $41!$ 種方法可以排序前 41 個數，但因為第一大與第二大的數的位置是固定的，所以可先將它們移除後，會有 $39!$ 種方法可以排列剩下 39 個數，如此一來，將會使得最大的數位在第 41 個位置且第二大的數在第 25 個位置。因此可得到機率 $\frac{39!}{41!} = \frac{1}{41 \cdot 40} = \frac{1}{1640}$ 。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「107 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。