雙週一題網路數學問題徵答
106 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第四題： 107.04.20 公佈，107.05.04 中午 12 點截止

假如 a 與 b 爲整數使得 x^2-3x+1 爲 $ax^{12}+bx^{11}-1$ 的因式，試求 (a,b) 值？ 答案：$(-17711, 46368)$

解答： 令多項式 $p(x)=ax^{12}+bx^{11}+1,\ g(x)=x^2-3x+1$。假設 $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 其兩根爲 $\alpha,\ \beta$。

利用一元二次方程式公式解，求得 $\alpha=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$。另外由韋達定理得知，

$$\alpha+\beta=3 \tag{1}$$
$$\alpha\beta=1 \tag{2}$$

根據題意，因爲 $g(x)\mid p(x)$，所以 $g(x)$ 的兩根 $\alpha,\ \beta$ 亦爲 $p(x)$ 的其中兩根，則由因式定理得

$$\begin{cases} a\alpha^{12}+b\alpha^{11}=1 \\ a\beta^{12}+b\beta^{11}=1 \end{cases}$$

利用二元的克拉瑪公式，可得

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha^{12} & \alpha^{11}\\ \beta^{12} & \beta^{11}\end{vmatrix}=\alpha^{12}\beta^{11}-\alpha^{11}\beta^{12}=(\alpha\beta)^{11}(\alpha-\beta)\overset{(??)}{=}1^{11}(-\sqrt{5})=-\sqrt{5}$$

$$\Delta_a=\begin{vmatrix}1 & \alpha^{11}\\ 1 & \beta^{11}\end{vmatrix}=\beta^{11}-\alpha^{11} \tag{3}$$

$$\Delta_b=\begin{vmatrix}\alpha^{12} & 1\\ \beta^{12} & 1\end{vmatrix}=\alpha^{12}-\beta^{12} \tag{4}$$

因爲 $\alpha,\ \beta$ 爲 $g(x)$ 的兩根，所以可得

$$g(\alpha)=\alpha^2-3\alpha+1=0 \tag{5}$$
$$g(\beta)=\beta^2-3\beta+1=0 \tag{6}$$

將 (**??**) 及 (**??**) 分別乘以 α^{n-2} 及 β^{n-2}，得到

$$\alpha^{n-2}(\alpha^2-3\alpha+1)=0 \tag{7}$$
$$\beta^{n-2}(\beta^2-3\beta+1)=0 \tag{8}$$

假設 $C_n=\alpha^n-\beta^n$，則將 (**??**) + (**??**)，可得 $C_n-3C_{n-1}+C_{n-2}=0,\ n\geq 2$ 且 $C_0=0,\ C_1=-\sqrt{5}$。因此利用迭代得到 $(\Delta_a,\Delta_b)=\left(17711\sqrt{5},-46368\sqrt{5}\right)$。

因此，求得唯一解

$$(a,b)=\left(\frac{\Delta_a}{\Delta},\frac{\Delta_b}{\Delta}\right)=(-17711,46368) \qquad \square$$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「107 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。