

# 雙週一題網路數學問題徵答 106 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系  
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第二題： 107.03.23 公佈，107.04.06 中午 12 點截止

令  $a_n = 18^n + 20^n$ ，試求  $a_{17}$  除以 361 的餘數為何？ 答案：285

解答：由題意可知  $a_{17} = 18^{17} + 20^{17}$ ，因為  $361 = 19^2$ ，則  $18 = 19 - 1$ ， $20 = 19 + 1$ ，故可將  $a_{17}$  改寫為  $(19 - 1)^{17} + (19 + 1)^{17}$ ，由二項式定理可知

$$\begin{aligned} a_{17} &= (19 - 1)^{17} + (19 + 1)^{17} \\ &= \left[ \binom{17}{17} \cdot 19^{17} - \binom{17}{16} \cdot 19^{16} + \binom{17}{15} \cdot 19^{15} - \dots + \binom{17}{1} \cdot 19 - 1 \right] \\ &\quad + \left[ \binom{17}{17} \cdot 19^{17} + \binom{17}{16} \cdot 19^{16} + \binom{17}{15} \cdot 19^{15} + \dots + \binom{17}{1} \cdot 19 + 1 \right] \\ &= 2 \left( \underbrace{19^{17} + 136 \cdot 19^{15} + \dots + 680 \cdot 19^3}_{\text{皆為 361 的倍數，即可被 361 整除}} + 17 \cdot 19 \right) \end{aligned}$$

故

$$(19 - 1)^{17} + (19 + 1)^{17} \equiv 2 \cdot 17 \cdot 19 \equiv 285 \pmod{361} \quad \square$$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem@gmail.com](mailto:nsysu.problem@gmail.com) (主旨為「107 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。