

雙週一題網路數學問題徵答 105 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 106.06.02 公佈，106.06.16 中午 12 點截止

在球 $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上給定 n 個點，證明它們之間距離的平方和不會超過 n^2 ，什麼時候它們之間距離的平方和會等於 n^2 ？ 答案： n 個點的和為原點

解答：這 n 個點可以表示成向量 \mathbf{v}_i ($i = 1, \dots, n$) 具有 $|\mathbf{v}_i| = 1$ 。展開“距離的平方和”，用以下廣義的恆等式：

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \\ &= (n-1) \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \\ &= n \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i - \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \right\} \\ &= n^2 - \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{v}_i \right) \cdot \left(\sum_{1 \leq j \leq n} \mathbf{v}_j \right) \\ &\leq n^2 \end{aligned}$$

此外等式成立，若且唯若 $\sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ 。

□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「106 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。