雙週一題網路數學問題徵答
105 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 106.05.19 公佈，106.06.02 中午 12 點截止

令 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$，其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 為實數且 n 為正整數。給定 $|f(x)| \leq |\sin x|$ 對所有 x 為實數，證明 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$。

解答： 對 $f(x)$ 微分，

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \cdots + na_n \cos nx \\
f'(0) &= a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| &= |f'(0)| \\
&= \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \\
&= \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{\sin x} \right| \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| \\
&= \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{\sin x} \right| \leq 1
\end{aligned}
$$

□

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「106 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。