

# 雙週一題網路數學問題徵答 105 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系  
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 106.05.05 公佈，106.05.19 中午 12 點截止

已知平面上三點  $O(0,0)$ ,  $A(0,3)$ ,  $B(n,0)$ ，其中  $n \in \mathbb{N}$ ，若  $\triangle OAB$  的內切圓半徑為  $r_n$ ，外接圓半徑為  $R_n$ ，求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n r_n}{R_n + r_n}$ 。

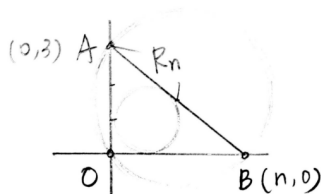
解答：  $\overline{AB} = \sqrt{n^2 + 9} \Rightarrow R_n = \frac{\sqrt{n^2+9}}{2}$ ,  $r_n = \frac{\triangle ABC}{s} = \frac{3n}{n+3+\sqrt{n^2+9}}$

可得  $\begin{cases} \frac{1}{R_n} = \frac{2}{\sqrt{n^2+9}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R_n} = 0 \\ \frac{1}{r_n} = \frac{n+3+\sqrt{n^2+9}}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{n^2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} = \frac{2}{3} \end{cases}$

所求

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n r_n}{R_n + r_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{R_n + r_n}{R_n r_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{R_n} + \frac{1}{r_n}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n}} \\ &= \frac{1}{0 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

□



答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem@gmail.com](mailto:nsysu.problem@gmail.com) (主旨為「106 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。