

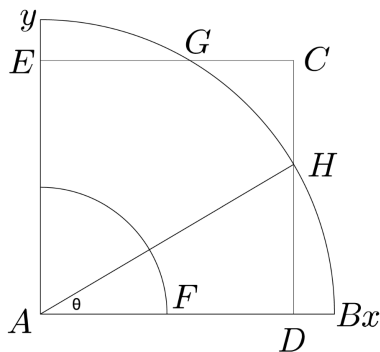
雙週一題網路數學問題徵答 105 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 106.04.21 公佈，106.05.05 中午 12 點截止

設 $A(0, 0, 6)$, $B(0, 0, 20)$ 為空間中兩定點， $P(x, y, 0)$ 為一動點。若 $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 15$, $\angle APB \geq 30^\circ$ ，求 P 點之軌跡所形成圖形之面積。

解答：因為 P 對 z 軸旋轉，角度不變，因此可先設 $P(x, 0, 0)$ 。如下圖



$$\begin{aligned} \cos \angle APB &= \frac{(-x, 0, 6) \cdot (-x, 0, 20)}{\sqrt{x^2 + 36}\sqrt{x^2 + 400}} = \frac{x^2 + 120}{\sqrt{x^2 + 36}\sqrt{x^2 + 400}} \\ \cos \angle APB \geq 30^\circ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 120}{\sqrt{x^2 + 36}\sqrt{x^2 + 400}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow x^4 - 348x^2 + 14400 \leq 0 \\ &\Rightarrow (x^2 - 48)(x^2 - 300) \leq 0 \\ &\Rightarrow 4\sqrt{3} \leq |x| \leq 10\sqrt{3} \\ \cos \theta &= \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

所求面積為兩圓之間區域扣除方形外的部分，

$$\text{即 } \frac{\pi}{4}(300 - 48) - 2\left(\frac{\pi}{12} \cdot 300 - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5\sqrt{3}\right) = 13\pi + 75\sqrt{3}。 \quad \square$$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「106 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。