

雙週一題網路數學問題徵答 105 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第二題： 106.03.10 公佈，106.03.24 中午 12 點截止

證明有無窮多個質數可以表成 $4k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ 。

解答：我們一開始將最小質數記做 p 且 $p \equiv 3 \pmod{4}$ (簡單假設 $p = 3$)。由反證法假設只有有限多個質數同餘 3 關於模 4。令 p_1, p_2, \dots, p_k 為這些整數且令 $P = p_1 p_2 \cdots p_k$ 表它們的乘積。我們有 $4P - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ 。若 $4P - 1$ 的所有質因數皆為同餘 1 關於模 4，則 $4P - 1$ 將為同餘 1 關於模 4。如此一來存在 $4P - 1$ 的質因數 p 將為同餘 3 關於模 4。另一方面對於所有 i , $1 \leq i \leq k$, $\gcd(4P - 1, p_i) = 1$ ，接著我們能找到另一個質數是同餘 3 關於模 4，與假設矛盾。如此一來存在無窮多個質數可以表成 $4k - 1$ 。 \square

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「106 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。