

雙週一題網路數學問題徵答 106 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 106.12.29 公佈，107.01.12 中午 12 點截止

令

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$$

為一個 n 次整係數多項式，假設 a_0, a_n 與 $f(1)$ 是奇數，試證 $f(x) = 0$ 沒有有理根。

解答：假設 $f(p/q) = 0$ 且 p 與 q 為互質整數，則方程式

$$q^n f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 p^n + q a_1 p^{n-1} + \cdots + q^{n-1} a_{n-1} p + q^n a_n = 0 \quad (1)$$

所以 q 整除 a_0 且 p 整除 a_n ，且 p 和 q 都是奇數。因此

$$\begin{aligned} a_0 p^n + q a_1 p^{n-1} + \cdots + q^{n-1} a_{n-1} p + q^n a_n &\equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= f(1) = 1 \pmod{2} \end{aligned} \quad (2)$$

得到 (2) 與 (1) 矛盾。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「106 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。